



ڈاکٹر ذاکر حسین لائبریری

DR. ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA
JAMIA N-GAR

NEW DELHI

Please examine the book before
taking it out. You will be res-
ponsible for damages to the book
discovered while returning it.

1097

Dr. A. H. Farooqi



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم و ملت مستوی

حصہ اول

انٹرمیڈیٹ کے لئے برہنہ شری لونی حصہ اول
مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایف۔ اے۔ (پنجاب)

بی۔ اے۔ ایل ایل۔ بی۔ (کمرہ) ریٹائرڈ ۱۹۱۲ء قراچی (پنجاب)

گورنمنٹ آف انڈیا سکالر کمرہ (ریاضیات) اینیول ایگریٹر کمرہ (ریاضیات)

اینیول فوڈیشن سکالر کمرہ (ریاضیات)

رکن سرشتہ تالیف و ترجمہ

جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۸ھ ۱۳۲۹ھ ۱۹۱۹ء

مطبوعہ دارالعلوم اسلامیہ پاکستان

یہ کتاب سیکلن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کافی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مُقَدِّمہ



دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں اضطراب کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں ، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے ، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے ، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے ۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے ۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں ۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گزری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کر کے تنہا اور الگ ، تنہا نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پتھپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

”دن سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے“

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور ہج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی ادھوری کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کہیں گے جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کہیں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈسنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں تبصرہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہنر آکزیلنڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سے سالار آصف شاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ **نَوَابِ مِیْرُ عُمَانِ عَلِیخان بہادر فتح جنگ** جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلدائتہ ملکہ و سلطنتہ نے جن کی علمی قدردانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں اہلئے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، یہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سررشتہ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہارلنڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سرسید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں **اَعْلٰی حَضَرَتِ وَاَفْلَسِ** جیسے علم پرورد
فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
پائی ہے۔ اchiائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں،
خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
عبدالرحمن ثالث نے، بکراجیت و اکبر نے ہندوستان میں،
الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائٹ نے روس میں
اور مت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت
اَحْمَدِیَّہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ **اَعْلٰی حَضَرَتِ وَاَفْلَسِ**
کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات
کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منہلہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے،
اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تنہیب
و شائستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ
دہشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے
فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیات انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں سمجھتا، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم گویا ایک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منظر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن بادیجود بعد مسافت و اختلاف مالا یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰ حضرت و اقل س نے

پہانا اور جامعہ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعہ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتداء سے انتہا تک ذریعہ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں ”ہانت بہانت کی بولیاں“ بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعویٰ کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صمیم ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مینا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی مان ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

میتا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتہ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتہ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا ثبوت ہے۔ یہ سررشتہ ہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام غایقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہر علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہر لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہل علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعد مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بہوں چڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصول ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی تصدیق مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہوتا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کر لیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترتا تو خود نکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کر لیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ ہمیشہ کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں رد و بدل نہ ہو سکے بلکہ فرہنگ اصطلاحات عثمانیہ جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فرو گذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھانی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔ اس سرشت کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرض اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جمالت کا استیصال ہو۔ جمالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتاہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جمالت کا مقابلہ کر کے اسے پس پا کر سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سرشت قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کمال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصرِ فاضل غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے بلکہ وہ صحت کی طرف رہتائی کرتی ہے پچھلویں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہرِ تعلیم (ہیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار و ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

”ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے میں بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے بھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔ اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا بھوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سی سی ہے اور پہلی سی سی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے، نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی نوہ، جدوجہد کی رسائی خود بخود ترقی کے درجے طے کر لے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ڈرے کا بھی ستارہ جگمگے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور

اَلْحَضَرَتُّوْا قُلُوْٓسْ کی نظر کیسا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مذہب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت خیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبحِ وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شبِ بیدارِ روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصرِ رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

، ڈالنا اور نیو کھودنا ہے اور فرہاد وار شیریں حکمت کی خاطر پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب ہوگی۔

میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اس کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکان ضیح اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے ان کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت یہ کہ سررشتہ جناب مشر محمد اکبر حیدری بی۔ اے مقدمہ مالک و کو توالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا م و انتظام جامعہ عثمانیہ میں خاص انعام مل رہا ہے۔ اور کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان رت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی رت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہیں مددی و

عبدالحق

ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

اَلْكَارِجَالِیَّةُ



- مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ ناظم۔
- قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ ریٹائر۔۔۔ مترجم ریاضیات
- چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی۔۔۔ مترجم سائنس
- مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
- مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔ مترجم معاشیات
- قاضی تلمذ حسین صاحب ایم۔ اے۔۔۔ مترجم سیاسیات
- مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔ مترجم تاریخ۔
- مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔ مترجم فلسفہ و منطق
- مولوی عبدالحکیم صاحب شرر۔۔۔۔۔ مولف تاریخ اسلام
- مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔ مترجم قانون۔
- مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم کتب عربی
- علاوہ ان مذکورہ بالا مترجمین کے مولوی حاجی
- صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطہ نظر
- سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب
- طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

ارکان مجلس و تنظیمات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب ککب وظیفہ یاب نگار علی (سابق ناظم موم شہری)
 مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
 نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
 مولوی حمید الدین صاحب سلیم
 مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سرشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے ، مترجمین سرشتہ تالیف و ترجمہ نیز
 دوسرے اصحاب سے بلحاظ ان کے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً
 خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے ریگر (پرنسپل ٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
 مولوی عبدالواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
 پروفیسر عبدالرحمن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)
 مرزا محمد ہادی صاحب بی۔ اے (پروفیسر کرپن کالج لکھنؤ)
 مولوی سلیمان صاحب ندوی

ید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

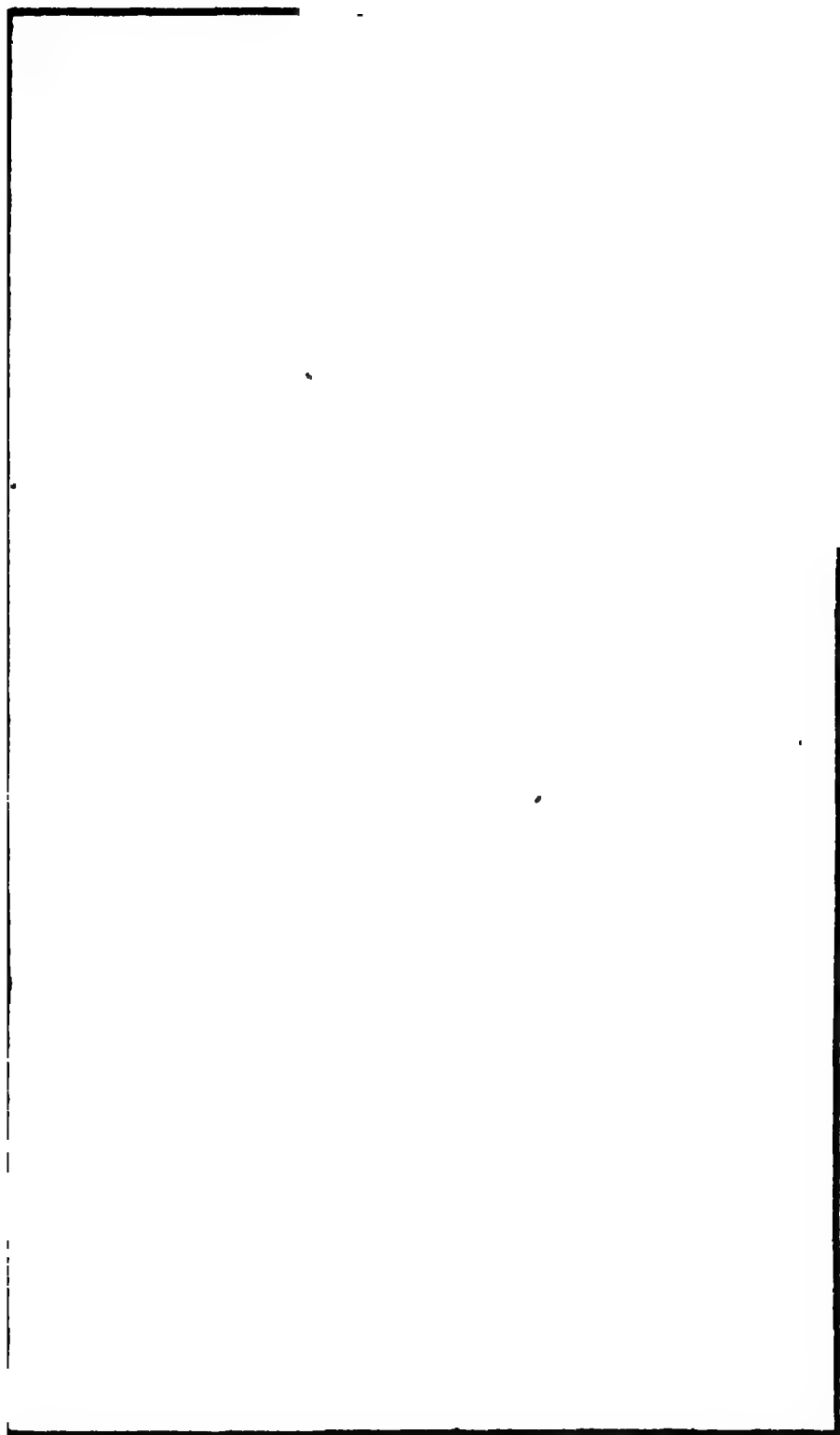
فہرست مضامین

حصہ اول

باب	مضمون	صفحہ
۱	زاویوں کی پیمائش - شینی اور مٹی پیمانے	۱
۲	قوسی پیمانہ - نیم قطری زاویہ ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو ناویہ قائمہ سے کم ہوں -	۱۲ ۳۲
۳	۲۵، ۳۰، ۴۰، ۶۰، ۷۰ کے زاویوں کی قیمتیں	۴۸
۴	بلندیوں اور فاصلوں کی آسان مثالیں علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال	۵۸ ۶۹
۵	مثلثی نسبتوں کے تغیرات کا مرتبہ کرنا کسی مقدار کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں، ۷۰ - ۹۰، ۹۰ + ۷۰، کی مثلثی نسبتیں	۷۸ ۹۴
۶	ان سب زاویوں کے لئے جن کی مثلثی	

۱۰۸	نسبتیں ایک ہی ہوں۔ ایک جملہ عامہ کا دریافت کرنا	
۱۲۳	دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تقویٰ کی مثلثی نسبتیں۔	۷
۱۳۱	ضوابط متعلقہ حاصل ضرب	
۱۵۰	اضعانی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں	۸
۱۶۲	مشتبہ علامات کی تشریح	
۱۶۶	۱۸ ، ۳۶ ، ۹ کے زاویے	
۱۸۲	متماثلات اور مثلثی معادلات	۹
۲۰۴	لوکار تم	۱۰
۲۱۲	لوکار تموں کی جدولیں	
۲۲۵	اصول اجزائے مناسب	۱۱
۲۵۲	مثلث کے اضلاع اور زاویے	۱۲
۲۷۳	مثلثوں کا حل	۱۳
۲۸۰	دو اضلاع اور انکا درمیانی زاویہ معلوم ہے	
۲۹۰	صورت مشتبہ	
۳۰۴	بلندیاں اور فاصلے	۱۴
۳۳۳	مثلث کے خواص	۱۵
۳۳۶	مثلث کے متعلقہ دائرے	
۳۴۷	عمودی مرکز اور مثلث پائین	
۳۵۱	ہندسی مرکز اور وسطانیات	

۳۶۵	ذو اربعۃ الاضلاع	۱
۳۶۳	متنظم اشکال کثیر الاضلاع	
۳۸۱	منفیہ زاویوں کی مثلث نسبتیں	۱
۳۸۸	جب ط > ط > مس ط	
۳۹۱	دائرہ کا رقبہ -	
۳۹۶	آق کا میلان	
۴۰۷	مقلوب و مستدیرہ جملے	۱
۴۱۷	آسان مثلثی سلعے	۱
۴۲۴	استقاط	۲
۴۳۲	تظیل	۲
۴۸۱	متفرق مثالیں	
۵۱۵	جوابات	
	نوکاری اور مثلثی جدولیں پانچ ملحوظ	
	ہندسوں تک	



علم مثلث کے مشہور ضابطے

حصہ اول

۱- دائرے کا محیط = $2\pi r$ (صفحہ ۱۴)

اس میں π عبرانی حرف "حیت" ہے

۲ 3.14159 [اس کے تقرب $\frac{22}{7}$ اور $\frac{255}{81}$] (صفحہ ۱۵)

ایک نیم قطری زاویہ = $54^\circ 44' 18''$ تقریباً (صفحہ ۱۸)

دوقائے = $90^\circ = 90.0^\circ = \pi$ نیم قطری (صفحہ ۲۱)

زاویہ = $\frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} \times \text{زاویہ نیم قطری}$ (صفحہ ۲۳)

۲- جب 1° طہ + حجم 2° طہ = ۱

قطر 1° طہ = ۱ + مس 2° طہ

قیم 1° طہ = ۱ + مم 2° طہ (صفحہ ۲۸)

۳- جب $0^\circ = 0^\circ$ ' حجم $0^\circ = 0^\circ$ (صفحہ ۴۰)

جب $1^\circ = 1^\circ$ ' حجم $1^\circ = \frac{360}{2}$ (صفحہ ۳۸)

جب ۲۵ = جم ۲۵ = $\frac{1}{\frac{1}{25}}$ (دفعه ۳۷)

جب ۹۰ = جم ۹۰ = $\frac{1}{\frac{1}{90}}$ (دفعه ۳۹)

جب ۹۰ = ا = جم ۹۰ = . (دفعه ۴۱)

جب ۱۵ = ا = جم ۱۵ = $\frac{1+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}$ (دفعه ۱۱۲)

جب ۱۸ = ا = جم ۳۶ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (دفعات ۱۲۶ تا ۱۲۷)

۴- جب (-ط) = - جب ط ' جم (-ط) = جم ط (دفعه ۷۴)

جب (-۹۰-ط) = جم ط ' جم (-۹۰-ط) = جب ط (دفعه ۷۵)

جب (۹۰+ط) = جم ط ' جم (۹۰+ط) = - جب ط (دفعه ۷۶)

جب (۱۸۰-ط) = جب ط ' جم (۱۸۰-ط) = - جم ط (دفعه ۷۸)

جب (۱۸۰+ط) = - جب ط ' جم (۱۸۰+ط) = جم ط (دفعه ۷۹)

۵- اگر جب ط = جب ط = ن + (-۱) ط (دفعه ۸۸)

اگر جم ط = جم ط = ن ± ط (دفعه ۸۹)

اگر مس ط = مس ط = ن + ط (دفعه ۹۰)

۶- جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب (دفعه ۹۲)

$$\text{جب (ا-ب)} = \text{جب ا} \text{جم ب} - \text{جم ا} \text{جب ب}$$

$$\text{جم (ا-ب)} = \text{جم ا} \text{جم ب} + \text{جب ا} \text{جب ب} \quad (\text{دفعہ ۹۶})$$

$$\text{جب ج} + \text{جب د} = ۲ \text{ جب } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

$$\text{جب ج} - \text{ب د} = ۲ \text{ جم } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

$$\text{جم ج} + \text{جم د} = ۲ \text{ جم } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

$$\text{جم د} - \text{جم ج} = ۲ \text{ جب } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \quad (\text{دفعہ ۱۰۰})$$

$$۲ \text{ جب ا} \text{جم ب} = \text{جب (ا+ب)} + \text{جب (ا-ب)}$$

$$۲ \text{ جم ا} \text{جب ب} = \text{جب (ا+ب)} - \text{جب (ا-ب)}$$

$$۲ \text{ جم ا} \text{جم ب} = \text{جم (ا+ب)} + \text{جم (ا-ب)}$$

$$۲ \text{ جب ا} \text{جب ب} = \text{جم (ا-ب)} - \text{جم (ا+ب)} \quad (\text{دفعہ ۱۰۳})$$

$$\text{مس (ا+ب)} = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{ا} + \text{مس ا} \text{مس ب}}$$

$$\text{مس (ا-ب)} = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{\text{ا} + \text{مس ا} \text{مس ب}} \quad (\text{دفعہ ۱۰۴})$$

$$\text{جب ۲} = ۲ \text{ جب ا} \text{جم ا}$$

$$\text{جم } ۱۲ = ۱۲ \text{ جم } ۱ - \text{جب } ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب } ۱ = ۲ \text{ جم } ۱ - ۱ \text{ (دفعه ۱۱۱)}$$

$$\text{جب } ۱۲ = ۱۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ مس } ۱ = ۱۲ \text{ جم } ۱ - ۱ \text{ مس } ۱ = ۱۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ (دفعه ۱۱۵)}$$

$$\text{مس } ۱۲ = ۱۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ مس } ۱ \text{ (دفعه ۱۱۱)}$$

$$\text{جب } ۳ = ۳ \text{ جب } ۱ = ۳ \text{ جب } ۱ - ۳ \text{ جب } ۱$$

$$\text{جم } ۳ = ۳ \text{ جم } ۱ = ۳ \text{ جم } ۱ - ۳ \text{ جم } ۱$$

$$\text{مس } ۳ = ۳ \text{ مس } ۱ = ۳ \text{ مس } ۱ - ۳ \text{ مس } ۱ \text{ (دفعه ۱۱۳)}$$

$$\text{جب } \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} \text{ جب } ۱ = \frac{۱}{۴} \text{ جم } ۱ = \frac{۱}{۴} \text{ جم } ۱ - ۱ \text{ (دفعه ۱۱۰)}$$

$$\text{جب } ۲ = \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} \text{ جب } ۱ = \frac{۱}{۴} \text{ جب } ۱ - ۱ \text{ جب } ۱$$

$$\text{جم } ۲ = \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} \text{ جب } ۱ = \frac{۱}{۴} \text{ جب } ۱ - ۱ \text{ (دفعه ۱۱۹)}$$

$$\text{مس } (۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱) = \frac{۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱}{۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱} \text{ (دفعه ۱۱۳)}$$

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱ = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱$$

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱ = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱$$

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱ = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱$$

(دفعہ ۱۵۳) $\text{وکرم} = \text{وکرم} \times \text{وکرم}$

(دفعہ ۱۶۹) $۸ - \frac{\text{ج} \text{ب}}{\frac{1}{4}} = \frac{\text{ج} \text{ب}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ج} \text{ب}}{\frac{1}{4}}$

(دفعہ ۱۷۰) $\text{جم} ۱ = \frac{\text{ب} + \text{ج} - ۱}{\text{ب} \text{ج}}$

(دفعہ ۱۷۱) $\text{ج} \text{ب} \frac{1}{4} = \frac{(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ب} \text{ج}}$

(دفعہ ۱۷۲) $\text{جم} \frac{1}{4} = \frac{\text{ن}(\text{ن} - ۱)}{\text{ب} \text{ج}}$

(دفعہ ۱۷۳) $\text{مس} \frac{1}{4} = \frac{(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ن}(\text{ن} - ۱)}$

(دفعہ ۱۷۵) $\text{ج} \text{ب} ۱ = \frac{2}{\text{ب} \text{ج}} \text{ن}(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})$

(دفعہ ۱۷۶) $۱ = \text{ب} \text{جم} \text{ج} + \text{ج} \text{جم} \text{ب} + \dots$

(دفعہ ۱۷۷) $\text{مس} \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \text{جم} \frac{1}{۲}$

$\text{ن} = \frac{2}{\text{ن}(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})} \text{ب} \text{ج} \text{ب} ۱$

(دفعہ ۲۰۴) $\frac{1}{4} \text{ج} \text{ب} ۱ = \frac{1}{4} \text{ب} \text{ج} ۱$

۹ - $\frac{1}{4} \text{ج} \text{ب} ۱ = \frac{1}{4} \text{ب} \text{ج} ۱ = \frac{1}{4} \text{ج} \text{ب} ۱ = \frac{1}{4} \text{ب} \text{ج} ۱$

$$r = \frac{N}{n} = (n-1) \text{ مس} \frac{1}{p} = \dots \dots \dots (\text{دفعات } 2.8, 2.9)$$

..... $\frac{1}{4}$ من مس (وفات ۳۱ و ۳۲)

ایک ایسی فوارہٴ الاصلاح کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر
بن سکتی ہے

۱ = (ن-ا) (ن-ب) (ن-ج) (ن-د) (دفتر ۲۲۵)

جیب ط = ا جیب زاویه ط نهایت چھوٹا ہو (صفحہ ۲۳۶)

دائرے کا رقبہ = πr^2 (صفحہ ۲۳۹)

۱۰۔ جب علم + جب (علم + یہ) + جب (علم + یہ) + ... ن نمون

$$\frac{\text{جب } \left\{ \frac{ن}{۲} - ۱ \right\} + \frac{ن}{۲}}{\text{جب } \frac{ن}{۲}} = \text{ (وقفہ ۲۴)}$$

جم + جم + جم (ع + ب) + جم (ع + ب) + = ن رقوں تک

$$\text{جم} \left\{ \frac{1-n}{2} + \frac{n}{2} \right\} \text{جب } \frac{n}{2} \text{ (وقفہ ۲۴۸)}$$

باب اول

زاویوں کی پیمائش ستینی اور مئی پیمانوں میں قوسی پیمانہ

۱۔ لفظ ٹرگنومٹری (علم مثلث) دو یونانی لفظوں سے مرکب ہے جن کا مطلب "مثلثوں کی پیمائش" ہے علم مثلث کا اصلی مقصد یہی تھا اور اب تک بھی اس کا بڑا استعمال یہ ہے کہ اس کے ذریعہ مثلثوں کے ضلعوں اور زاویوں کے باہمی ارتباطات اور تعلقات معلوم کئے جاتے ہیں مگر اب علم مثلث کے معنی بہت وسیع ہو گئے ہیں اور اس میں وہ جملہ فروع ریاضی شامل ہیں جن کا تعلق زاویوں سے ہے۔

علم ہندسہ میں زاویوں کی پیمائش زاویہ قائمہ یا اس کی کسروں کی رقوم میں کی جاتی ہے مگر مصریچا اپنی بڑی مقدار

کی وجہ سے یہ اکائی علم مثلث میں اتنی موزوں نہیں ہے اسلئے
زاویوں کا اندازہ لگانے کے لئے کئی اور ترکیبیں اختیار کی
گئی ہیں ان میں ایک پیمانہ ستینی (سکس جیسل) ہے جو علم مثلث
میں اکثر استعمال ہوتا ہے، اس کے نام سے ظاہر ہے کہ اس میں
ہر ایک اکائی اپنے سے اگلی چھوٹی اکائی کی ساٹھ گنی ہوتی
ہے اس پیمانہ کو انگریزی ترکیب تقسیم بھی کہتے ہیں
۲۔ ستینی پیمانہ یعنی انگریزی ترکیب تقسیم میں زاویہ قائمہ کو ۹۰
برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو درجہ (ڈگری)
کہتے ہیں، ہر ایک درجہ کو ۶۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں
اور ہر ایک حصہ کو دقیقہ (منٹ) کہتے ہیں اور اسی طرح ہر ایک
دقیقہ یا منٹ کے ۶۰ برابر حصوں میں سے ہر ایک حصہ کو ثانیہ
(سکنڈ) کہتے ہیں۔

رموز 'ا'، 'ا'، 'ا' درجہ، دقیقہ، ثانیہ کو بالترتیب تعبیر کرتی

ہیں پس

- ۹۰ ثنائے (۹۰) برابر ہیں ایک دقیقہ (ا) کے
- ۶۰ دقیقے (۶۰) " " درجہ (ا) کے
- ۹۰ درجے (۹۰) " " زاویہ قائمہ کے

نوٹ۔ اگرچہ یہ سب اکائیاں زاویہ قائمہ سے حاصل ہوئی ہیں مگر قائمہ خود
اکائی ستینی پیمانہ کی نہیں ہے، بڑی سے بڑی اکائی اس ترکیب تقسیم کی
درجہ ہے پس ستینی پیمانہ کے موافق ۲ قاسمے = ۱۸۰° اور علیٰ ہذا القیاس۔

علم حساب کے معمولی قاعدوں سے زاویوں کی متوہل قانوں

سے درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں اور برعکس اس کے آسانی ہو سکتی ہے۔

مثال ۱۔ ۵۷۲۹۶ کو درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔
۵۷۲۹۶ درجوں کی تحویل دقیقوں میں ۶۰ سے ضرب دینے سے کہ اس طرح حاصل ہوگا ۳۴۳۷۶۴

اور ۳۴۳۷۶۴ دقیقوں کے ثنائے ۶۰ میں ضرب دینے سے بناؤ

پس ہمیں حاصل ہوگا ۵۷۲۹۶ ۱۷ ۳۵۶۴

مثال ۲۔ ۳۶۹ کو زادیہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو
ثانیوں کو ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل قسمت کے اول دقیقے لکھو پھر ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل کے ماقبل درجے لکھو اور آخر میں ۶۰ پر تقسیم کرو۔

$$\begin{array}{r} 9 \\ 40 \overline{) 369} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \ 15 \\ 40 \overline{) 369} \\ 360 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \ 15 \ 25 \\ 40 \overline{) 369} \\ 360 \\ \hline 9 \end{array}$$

جواب

مثال ۳۔ انگریزی ترکیب تقسیم کے موافق (۱) مخمس منتظم (۲) مسج منتظم کے ہر ایک زاویہ کی مقدار معلوم کرو

(۱) فرض کرو کہ مخمس منتظم کا زاویہ ۱ سے تعبیر ہوتا ہے۔

تب بموجب اقلیدس م اش ۳۲ نتیجہ صریح

۳ + ۱ = ۴ ثنائے = جتنے اضلاع ہوں ان سے دو گئے ۴

۴۔ فرانسیسی ترکیب تقسیم کا استعمال انگریزی ترکیب تقسیم کی نسبت زیادہ آسان اور سہل ہے مگر اس سے پیشتر کہ اسکو عملی طور پر اختیار کر لیا جائے جدولوں کی ایک بڑی تعداد کا نئے سرے سے حساب لگانا پڑے گا اس وجہ سے یہ ترکیب عملیات میں کبھی استعمال نہیں کی گئی اور اب تقریباً معدوم ہو چکی ہے۔

۵۔ ستینی پیمانہ کی تحویل مئنی پیمانہ میں اور برعکس اس کے۔ چونکہ ایک زاویہ قائمہ ۹۰ کے برابر ہوتا ہے اور نیز ۱۰۰ کے اس لئے $100 = 90$

$$1 = \frac{100}{90} \text{ اور } 1 = \frac{90}{100}$$

پس معلوم ہوا کہ انگریزی درجوں کو فرانسیسی درجوں میں تحویل کرنے کے لئے ہمیں کل انگریزی درجوں کی تعداد کا $\frac{1}{9}$ واں حصہ اُن کی تعداد پر زیادہ کرنا چاہیئے اور برعکس اس کے فرانسیسی درجوں کو انگریزی درجوں میں منتقل کرنے کے لئے فرانسیسی درجوں کی تعداد کا $\frac{1}{10}$ واں حصہ اُن کی تعداد سے منفی کرنا چاہیئے

$$\text{مثال} - 34 = (34 \times \frac{1}{9} + 34) = 34.44 = 34^\circ$$

$$\text{اور } 43 = (43 - \frac{1}{10} \times 43) = (43 - 4.3) = 38.7 = 39^\circ$$

اگر کسی زاویے میں درجوں کی صحیح تعداد شامل نہ ہو تو اس کو سب سے پہلے درجوں کی کسور میں لانا چاہیئے اور اس کے بعد فرانسیسی درجوں میں منتقل کرنا چاہیئے۔

عملی صورتوں میں زاویوں کو قائم الزاویہ یا اس کی کسور میں تبصیر کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے مثلاً ذیل سے اس کی توضیح

ہوگی۔

مثال ۱۔ ۱۴°۴۳' ۱۴' کی تحويل مئی پیمانہ میں کرد

$$۱۴' = \frac{۱۴}{۶۰} = ۰.۲۳۳۳$$

$$۱۴' اور ۱۴' = ۱۴'۵۸' = \frac{۱۴'۵۸'}{۶۰} = ۰.۲۴۷۵$$

$$۱۴' ۱۴' ۱۴' = ۱۴'۵۸' = \frac{۱۴'۵۸'}{۶۰} = ۰.۲۴۷۵$$

$$۰.۲۴۷۵ = ۰.۲۴۷۵$$

$$۰.۲۴۷۵ = ۰.۲۴۷۵$$

$$۰.۲۴۷۵ = ۰.۲۴۷۵$$

مثال ۲۔ ۱۴°۴۳' ۱۴' کی تحويل سستی پیمانہ میں کرد

$$۱۴' ۱۴' ۱۴' = ۱۴'۵۸' = \frac{۱۴'۵۸'}{۶۰}$$

$$\frac{۱۴'۵۸'}{۶۰} = ۰.۲۴۷۵$$

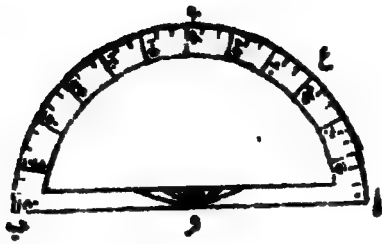
$$\frac{۱۴'۵۸'}{۶۰} = ۰.۲۴۷۵$$

$$\frac{۱۴'۵۸'}{۶۰} = ۰.۲۴۷۵$$

اس لئے ۱۴°۴۳' ۱۴' = ۱۴'۵۸' = ۰.۲۴۷۵

یہ زاویہ کش یا چاند زاویوں کی پیمائش کا ایک آلہ ہے۔ یہ دہات کی پتری ہوتی ہے جسکی شکل نصف دائرہ کی ہوتی ہے اور اسکے پر صفر سے ۱۸۰ تک نشان لگے ہوئے ہوتے ہیں۔

اگر کسی زاویہ کی پیمائش منظور ہو تو زاویہ کے راس مرکز و پر اور زاویہ کی ایک ساق کو قطر و پر ٹھیک ٹھیک منطبق کرتے ہیں اگر زاویہ کی دوسری ساق و ع ہو تو



کے مقابل محیط پر جو عدد ہوگا وہ زاویہ ع و ا کی مقدار کو درجوں میں تعبیر کرے گا۔

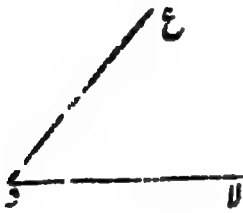
چونکہ کسی دائرہ میں مساوی قوسوں کے محاذی مرکزی زاوئے مساوی ہوتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ نصف دائرہ پر درجوں کے نشانات متساوی انفصل ہیں اس سے ہم یہ نتیجہ نکالیتے ہیں کہ جس قوس کے محاذی زاویہ ۱۰ ہو وہ اُس قوس کا دس گنا ہوگا جس کے سامنے کا زاویہ صرف ۱ ہو پس معلوم ہوا کہ کسی دائرہ کے مرکزی زاوئے اُن قوسوں کے متناسب ہوتے ہیں جن کے وہ محاذی ہوں۔

یہ نتیجہ اعظم اقلیدس م ۶ ثل ۳۳ میں زیادہ وضاحت سے ثابت کیا گیا ہے۔

زاویوں کی مثلثی تعبیر

اقلیدس کی تعریف زاویہ ”یعنی دو ایسے خطوط کا میلان جو آپس میں ٹھیک طور پر صادق نہیں آتی جب تک کہ زاوئے دو سے کم ہوں۔“

علم مثلث میں زاویہ کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ اگر کوئی خط مستقیم اپنے ایک سرے کے گرد ایک ہی سطح میں ایک مقام سے کسی دوسرے مقام تک چکر لگائے تو اس کی حرکت سے جو میلان ان دو مقامات کے درمیان پیدا ہو اس کو زاویہ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ شکل منسلکہ میں چکر لگانے والا خط مقام ولا سے مقام وع تک حرکت کرتا ہے، مثلثی اصطلاح میں اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ اس نے



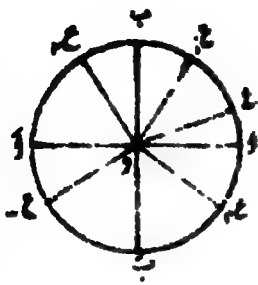
ایک زاویہ لایع مرقم کیا ہے "چکر لگانے والے خط کو نصف قطر دائرہ کہتے ہیں۔

گھڑی کی سوئیاں یا پیئے کے

آرے اس طرح سے زاویہ مرقم کرنے کی عمدہ مثالیں ہیں، گھڑی میں منٹوں کی سوئی ایک قائمہ یعنی ۹۰ درجے پر گھنٹے میں ۱۸۰ درجے پر گھنٹے میں اور ۳۶۰ درجے ایک گھنٹے میں مرقم کرتی ہے اور گھنٹوں کی سوئی اپنی گردش سے ۳۶۰ درجے ۱۲ گھنٹے میں ۷۲۰ درجے ایک دن میں مرقم کرتی ہے پس معلوم ہوا کہ علم مثلث میں زاویہ کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے۔

۸۔ کسی مقدار کے زاوے

فرض کرو کہ دو ثابت خط AO اور BO ایک نقطہ O پر متقاطعتی القوائم ہیں اور فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط OC



(جو ثابت نقطہ وکے گرد ایک ہی سطح
میں گردش کرتا ہے) مقام
وا سے شروع ہو کر گھڑی کی سوئیوں
کی متقابل سمت میں حرکت کرتا ہے
جب خط دائرہ وا اور وب کے
درمیان کسی مقام وع پر منطبق ہوتا

ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ اوع بتاتا ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے
جب خط دائرہ وب اور وا کے درمیان کسی مقام وع پر ہوتا
ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ایک قاعے سے بڑا ہوتا ہے۔

وا اور وب کے درمیان کسی مقام وع پر زاویہ مرتسمہ اوع
یعنی اوب + ب وا + ا وع یعنی دو قاعے + ا وع ہوتا
ہے یعنی زاویہ مرتسمہ دو قاعوں سے بڑا ہوتا ہے۔

اسی طرح سے وب اور وا کے درمیان کسی مقام وع
پر زاویہ مرتسمہ تین قاعوں سے بڑا ہوتا ہے

جب خط دائرہ ایک پورا چکر لگا چکنا ہے اور دوسری مرتبہ ابتدائی
مقام وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کی گردش سے جو زاویہ پیدا
ہوتا ہے وہ چار قاعوں کے برابر ہوتا ہے۔

اگر اس کے بعد خط دائرہ اپنی گردش کو جاری رکھے تو دوسری

مرتبہ جب وہ مقام وع پر پہنچتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ صرف
اوع نہیں ہوتا بلکہ ا قاعے + زاویہ اوع ہوتا ہے

اسی طرح سے جب خط دائرہ دو پورے چکر لگا چکنے کے بعد

مقام ربع پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ $= ۸۰$ قائلے
+ زاویہ Δ ربع

۹۔ خطوط مستقیم Δ اور Δ و Δ متقاطع ہو کر چار قائلے پیدا کرتے
ہیں اور سطح مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں، حصہ
 Δ و Δ کو ربع اول، Δ و Δ کو ربع دوم، Δ و Δ کو ربع سوم
اور Δ و Δ کو ربع چہارم کہتے ہیں۔ اب خط ثابت Δ اور خط دائر
ربع کے درمیان کوئی زاویہ فرض کرو، اگر Δ ربع اول میں مقام
ربع پر واقع ہو تو اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ زاویہ Δ ربع
اول میں ہے اگر Δ دوسرے ربع میں مقام ربع پر واقع
ہو تو زاویہ Δ ربع دوم میں کہتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔

۱۰۔ مفصلہ ذیل زاویے مرتسم کرنے کے بعد خط دائر کے مختلف مقامات
دریافت کرو۔

(۱) ۲۲۵ (۲) ۴۸۰ اور (۳) ۱۰۵۰

(۱) چونکہ $۲۲۵ = ۱۸۰ + ۴۵$ اس لئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں
خط دائر دو قائلے مرتسم کرنے کے بعد زاویہ ۴۵ میں گھوم چکا ہے۔
اس لئے اس وقت وہ ربع سوم میں ہے اور زاویہ Δ و Δ کی تنصیف
کرتا ہے۔

(۲) چونکہ $۴۸۰ = ۳۶۰ + ۱۲۰$ اس لئے ایک پورا چکر لگانے کے بعد
خط دائر نے زاویہ ۱۲۰ مرتسم کیا ہے، اس لئے وہ ربع دوم میں Δ و Δ
اور Δ کے درمیان ہے اور Δ و Δ کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

(۳) چونکہ $۱۰۵۰ = ۱۱ \times ۹۰ + ۶۰$ اس لئے معلوم ہوا کہ خط دائر ۱۱ پورے

چکر لگانے کے بعد زاویہ ۹۰° مرتب کر چکا ہے اور ریلچ چارم میں دب اور وا کے درمیان ہے اور دب کے ساتھ زاویہ ۹۰° بنتا ہے

امثلہ نمبری ۱

ذیل کے زاویوں کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو۔

- ۱۔ ۹۰° - ۲ - ۴۵° ۱۵°
- ۳ - ۹۳° ۱۷° ۲۵° ۳ - ۱۳۰° ۳۰°
- ۵ - ۲۱۰° ۳۰° ۳۰° ۶ - ۲۷۰° ۲۰° ۳۸°

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرو

- ۷ - ۳۰° ۸ - ۸۱°
- ۹ - ۳۸° ۳۰° ۱۰ - ۲۵° ۲۷° ۱۵°
- ۱۱ - ۲۳۵° ۱۲° ۳۶° ۱۲ - ۲۷۵° ۱۳° ۳۸°

ذیل کے زاویوں کو قائموں اور نیز انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی رقوم میں بیان کرو

- ۱۳ - ۱۲۰° ۱۴ - ۳۵° ۳۵° ۲۳°
- ۱۵ - ۳۹° ۲۵° ۳۶° ۱۶ - ۲۵۵° ۸° ۹°
- ۱۷ - ۲۵۹° ۶° ۵°

جب خط دار مصلہ ذیل زاویے مرتب کر چکا ہو تو ہر ایک صورت میں اس کے مقام کا نشان شکل میں دو۔

- ۱۸ - ۳۴° زاویہ قائمہ ۱۹ - ۳۴° زاویے قائمے
- ۲۰ - ۱۳۴° زاویے قائمے ۲۱ - ۱۲۰°

۲۳ - ۲۵

۲۲ - ۲۱۵

۲۵ - ۱۵۰

۲۳ - ۱۱۸۵

۲۴ - ۸۷۵

۲۶ - ۲۲۰

۲۸ - معلوم کرو کہ گھڑی کی گھنٹہ اور منٹ کی سوئیاں $\frac{1}{4}$ ۱۱ منٹ میں بالترتیب کتنے انگریزی درجے دقیقے اور ثانیے مرتسم کرتی ہیں۔

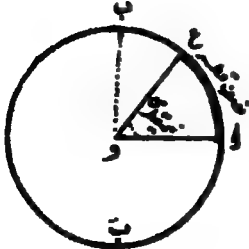
۲۹ - کسی مثلث قائم الزاویہ کے ایک زاویہ عادیہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دوسرے زاویہ کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے برابر ہے۔ دونوں زاویوں کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۳۰ - ثابت کرو کہ کسی زاویہ میں ستینی دقیقوں کی تعداد کو اسی زاویہ میں ستی دقیقوں کی تعداد سے نسبت ۵۰ : ۲۷ ہے۔

۳۱ - زاویہ ۴۳° ۸' کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی ستینی ثانیوں کی تعداد دوسرے حصہ کی بیٹی ثانیوں کی تعداد کے برابر ہو۔

قوسی پیمانہ

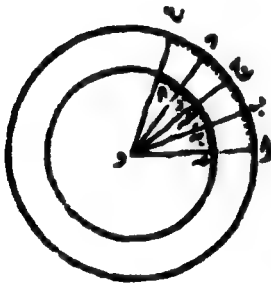
۱۱ - زاویوں کی ایک تیسری ترکیب تقسیم ایجاد ہوئی ہے اور علم ریاضی کی اعلیٰ فروع میں یہی استعمال کی جاتی ہے اس ترکیب تقسیم کی اکائی اس طرح حاصل ہوتی ہے۔



کوئی دائرہ ABC بے لوجہ کا مرکز O ہو اور کسی نقطہ A سے قوس AC برابر نصف قطر دائرہ کے

۱۱- پو وا اور وع کو ملاؤ زاویہ داوع کو قوسی پیمائش کی اکائی قرار دیتے ہیں یعنی اس زاویہ کی رقوم میں دو زاویوں کا اندازہ لگاتے ہیں۔
اس زاویہ کو انگریزی میں ریڈین کہتے ہیں ہم اسکو زاویہ نیمقطری یا اختصاراً نیم قطری کہیں گے اور اس کو آئندہ نشان (رقم) سے قبیہ کرینگے۔

۱۲- اب کسی پیانہ واحد یا اکائی کے مناسب انتخاب کے لئے فہمی ہے کہ وہ مقدار مستقل ہو اسلئے ہکو ثابت کرنا چاہیے کہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے، دفات ذیل میں ہم اس بات کو ثابت کریں گے۔
۱۳- مسئلہ کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی باہمی نسبت مستقل ہوتی ہے



دو دائرے کو جن کا مرکز مشترک ہو، بڑے دائرے کے اندر ایک ایسی منظم کثیر الاضلاع بناؤ جس کے ن اضلاع ہوں۔۔

فرض کرو کہ وا، وب، وج، ...
چھوٹے دائرہ کو نقاط عہ، بد، جہ، ...

پر ملتے ہیں عہ بہ، بد جہ، جہ لہ، ... کو ملاؤ
تب بموجب اقلیدس م ۶ ش ۲ عہ، بد، جہ، لہ، ... چھوٹے دائرہ کے اندر ن اضلاع کی ایک منظم کثیر الاضلاع ہے۔

چونکہ وعہ = وبہ اور وا = وب
اس لئے ضرور ہے کہ خطوط عہ بہ اور وا ب متوازی ہوں
اسلئے $\frac{وا}{وعہ} = \frac{اب}{عہ ب}$ (اقلیدس م ۶ ش ۴)

نیز کثیر الاضلاع اب ج د منظم ہے اس کا گھیرا یعنی
مجموعہ اضلاع ن x اب ہے اور اسی طرح سے اندرونی کثیر الاضلاع
کا مجموعہ اضلاع ن x عد بہ ہے پس

$$\frac{\text{بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}}{\text{اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}} = \frac{\text{ن x اب}}{\text{ن x عد بہ}}$$

$$= \frac{\text{اب}}{\text{عد بہ}} = \frac{\text{وا}}{\text{وعہ}} \dots \dots (۱)$$

اور تعلق صحیح ہے خواہ اوپر کی اشکال کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع
کچھ ہی ہو۔

اب فرض کرو کہ تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے (یعنی لا انتہا
بڑھتا ہے) یہاں تک کہ آخر الامر بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع
بیرونی دائرہ کے محیط کے قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔ اور
اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع اندرونی دائرہ کے محیط کے
قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔
اُس وقت ربط (۱) کی صورت یہ ہو جائیگی۔

$$\frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{وا}}{\text{وعہ}}$$

$$= \frac{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}} = \frac{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

اب چونکہ ابتدا میں دونوں دائروں کی مقدار پر کوئی قید نہیں رکھی گئی اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مقدار

محیط دائرہ

نصف قطر دائرہ

تمام دائروں کے لئے وہی ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرہ کے محیط کی نسبت اپنے نصف قطر سے اور نیز اس لئے اپنے قطر سے ایک مقدار معین اور مستقل ہے۔

۱۴۔ دفعہ گزشتہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ نسبت محیط تمام دائروں کے لئے یکساں ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کی قیمت کو ہم ہمیشہ عبرانی حرف π (حیت) سے تعبیر کریں گے۔ اس سے ظاہر ہے کہ π ایک عدد ہے

پس $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \text{عدد مستقل } \pi$

یعنی مسئلہ ذیل قائم ہوا کہ کسی دائرہ کا محیط ہمیشہ اس کے قطر کا π گنا یا اس کے نصف قطر کا 2π گنا ہوتا ہے۔

۱۵۔ اب مشکل یہ ہے کہ π کی قیمت نہ تو صحیح عدد ہے اور نہ کسر عام کی شکل میں بیان ہو سکتی ہے، اس لئے ہم اس کو کسر اعشاریہ متوالی یا غیر متوالی کی رقوم میں بھی تعبیر نہیں کر سکتے۔ عدد π مقدار متبائن ہے یعنی یہ ایک ایسی مقدار ہے جس کی قیمت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر نہیں ہو سکتی۔

آٹھ مرتبہ کے اعشاریہ تک اس کی صحیح قیمت ... ۳۱۴۱۵۹۲۶۵

کسر $\frac{22}{7}$ سے π کی قیمت پہلے دو مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوتی ہے، کیونکہ

$$\frac{22}{7} = 3.14285 \dots$$

کسر $\frac{355}{113}$ سے π کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوتی کیونکہ وہ ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہے کیونکہ

$$\frac{355}{113} = 3.14159203 \dots$$

نوٹ۔ کسر $\frac{355}{113}$ اس طرح یاد رکھ سکتی ہے۔ پہلے تین طاق اعداد کو اس ترتیب سے لکھو کہ اس میں ہر ایک عدد دو دفعہ مکرر آئے جیسے ۱۱۳۳۵۵ پھر اس عدد کو دو حصوں میں تقسیم کرو اور پہلے حصہ کو دوسرے پر تقسیم کرو۔ جیسے $113355 \div 113 = 355$ حاصل قسمت π کی قیمت ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوگی۔

خلاصہ یہ ہے کہ π کی تقریبی قیمت جو دو مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہو کسر $\frac{22}{7}$ ہے۔ مگر اس سے اچھا قریب $3.14159 \dots$ ہے۔ عمل تقسیم سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\pi} = 0.3183098862 \dots$$

۱۶۔ مثال ۱۔ ایک ڈائریکل کے پئے کا قطر ۲۸ انچ ہے۔ اگر پئے کے محیط کا کوئی ایک نقطہ ایک پورا چکر لگائے تو دریافت کرو کہ پئے کا مرکز اس آنتا میں کتنا فاصلہ طے کرے گا۔

اس جگہ نصف قطر = ۱۴ انچ

$$\text{اس لئے محیط} = 2 \times \pi \times 14 = 28\pi \text{ انچ}$$

$$\text{اگر } \pi = \frac{22}{7} \text{ تو محیط} = \frac{22}{7} \times 28 = 88 \text{ انچ}$$

= ۷ فٹ ۴ انچ (تقریباً)

اگر ۴ کو زیادہ صحیح قیمت ۳۵۱۴۱۵۹۲۶۵ دی جائے

تو محیط = ۲۸ × ۳۵۱۴۱۵۹۲۶۵ انچ

= ۷ فٹ ۴ انچ ۳۵۹۶۳۵۹.....

مثال ۲۔ ایک دوڑنے والے گول چکر کے گرد ۵ مرتبہ دوڑنے سے ایک

مٹاق ایک میل فاصلے کرتا ہے۔ چکر کا نصف قطر دریافت کرو۔

چکر کا محیط = $164 \times \frac{1}{8} = 20.5$ گز

پس اگر چکر کا نصف قطر گزوں میں ر سے تعبیر کریں

تو ۲۲ ر = ۳۵۲

ر = $\frac{164}{11}$ گز

فرض کرو کہ ۲۲ = $\frac{22}{1}$ تو ر = $\frac{6 \times 164}{22} = 45.6$ گز (تقریباً)

اگر ۴ کی زیادہ صحیح قیمت لیجائے تو $\frac{1}{11} = 318.31$ اور ہمیں حاصل ہوگا۔

ر = $318.31 \times 164 = 52022.56$ گز

امثلہ نمبری ۲

۱۔ اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو اس کے محیط کا طول دریافت کرو۔

۲۔ ایک ریل گاڑی کے پیچے کا قطر ۳ فٹ ہے اور وہ ایک سکند میں ۳ چکر لگاتا ہے۔ گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

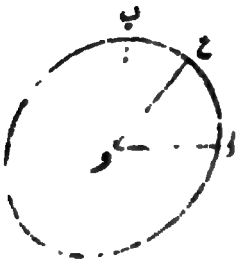
۳۔ ایک پون چکی کا بادبان ۱۸ فٹ ہے اور وہ ایک منٹ میں ۱۰ چکر لگاتا ہے معلوم کرو کہ اس کا سر ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔

۴۔ ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، ایسی رسی کا طول دریافت کرو جو

اس کے گول کنارے کے گرد ٹھیک ایک دفعہ آئے
 ۵۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ زمین اپنی حرکت سے ایک سال میں
 ایک ایسا دائرہ بناتی ہے جس کا نصف قطر ۹۲۵۰۰۰۰ میل ہے اور
 جس کا مرکز سورج ہے تو دریافت کرو کہ زمین ایک سال میں کتنا فاصلہ
 طے کرتی ہے۔

۶۔ ایک گاڑی کے پہیے کا نصف قطرافٹ ۹ اینچ ہے اور وہ $\frac{1}{4}$ سکنڈ
 میں اپنے مرکز کے گرد گھومنے سے ۸۰ کا زاویہ پیدا کرتا ہے، معلوم کرو
 کہ اس کے کنارے پر کا ایک نقطہ ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے
 ۷۔ مسئلہ زاویہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے۔

فرض کرو کہ زاویہ $\angle AOC$ زاویہ
 نیمقطری ہے (دفعہ ۱۱)



اور قوس AB ربع دائرہ ہے
 یعنی اس کا طول ایک چوتھائی
 محیط کے برابر ہے۔ بموجب دفعہ ۱۱

طول AB = $\frac{1}{4}$ الے جہاں ر

سے دائرہ کا نصف قطر تعبیر ہوتا ہے۔

پھر اسی طرح ہم یہ بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی دائرہ کے مرکز
 سے کسی ایکس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے مرکز سے
 کسی دوسرے ایکس میں ہے۔

پھر یہی ہے۔

تو اس کی حرکت سے π نیمقطری زاوے پیدا ہوتے ہیں اور جب وہ تین چکر لگاتا ہے تو π نیمقطری زاوے پیدا ہوتے ہیں اور بالعموم جب وہ n چکر ختم کرتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ 2π نیمقطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔

۲۰۔ عملیات میں اکثر نشان "نق" کو حذف کرتے ہیں اور "زاویہ π " کی بجائے "زاویہ π " لکھتے ہیں۔

طالب علم کو یہ بات یاد رکھنی چاہئے کہ جب اُس اکائی کا جس کی رقوم میں ایک زاویہ ناپا گیا ہو کوئی ذکر نہ ہو تو الفاظ "نیمقطری زاوے" وہاں محذوف ہوتے ہیں اور نہ یہ فرض کرنے میں وہ غلطی کریگا کہ π قائم مقام ۱۸۰ کا ہے۔ یہ صحیح ہے کہ π نیمقطری زاوے (π نق) اور ۱۸۰ ایک ہی زاوے کو تعبیر کرتے ہیں۔ مگر یاد رہے کہ π بنفسہ ایک عدد اور صرف ایک عدد ہے۔

۲۱۔ قوسی پیمانہ کی تحويل ستینی اور مہنی پیمانوں میں اور برعکس اسکے طالب علم کو یہ ارتباطات یاد رکھنے چاہئیں۔

$$\text{دوقائے} = ۱۸۰ = ۲۰۰ = \pi \text{ نیمقطری}$$

باقی عمل معمولی قواعد علم حساب کے متعلق ہے

$$\text{مثال (۱) } ۳۵ \pi = ۳۵ \times ۱۸۰ = ۶۳۰۰ = ۹۰$$

$$\text{(۲) } ۳۵ \pi = ۳۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۳۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

$$= ۲۰۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

$$\text{(۳) } ۳۵ \pi = ۳۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۳۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

$$= ۳۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۳۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

$$= ۲۲۳۶ \times \pi \text{ نیمقطری}$$

$$(۴) ۳۰^\circ - ۱۵^\circ = ۱۵^\circ \quad ۳۶ = ۱۵۳۶ \times \pi$$

$$= ۱۵۳۶ \times \frac{\pi}{۱۸۰} \text{ نیمقطری}$$

$$= ۲۰۰۰۰۶۸ \times \pi \text{ نیمقطری}$$

۲۲۔ مثال ۱۔ ایک مثلث کے زائے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے چھوٹے زاویہ میں فرانسیسی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویہ کی نیمقطری زاویوں کی تعداد سے نسبت ۴۰:۳۰ ہے۔ زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زائے (لاسا) ۰° لا اور (لا + لا) ۰° ہیں

چونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہے

$$\text{اس لئے } ۱۸۰ = لا - لا + لا + لا + لا = لا + لا + لا + لا + لا$$

$$\therefore لا = ۶۰$$

پس مطلوبہ زائے ہوئے

$$۰^\circ (۶۰ - لا) ، ۰^\circ ۶۰ ، ۰^\circ (لا + لا)$$

$$\text{اب } ۰^\circ (۶۰ - لا) \times \frac{۱}{۹} = ۰^\circ (۶۰ - لا)$$

$$\text{اور } ۰^\circ (لا + لا) \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰^\circ (لا + لا) \text{ نیمقطری}$$

$$\text{اس لئے } \frac{۱}{۹} (۶۰ - لا) : \frac{\pi}{۱۸۰} (لا + لا) = ۴۰ : ۳۰$$

$$\text{اس لئے } \frac{۴۰}{۳۰} = \frac{۶۰ - لا}{لا + لا} \times \frac{۲}{\pi}$$

$$\text{یعنی } لا + ۶۰ = (۶۰ - لا) ۵$$

$$\text{یعنی } لا = ۴۰$$

اس لئے مطلوبہ زاویے ہیں ۲۰ ، ۹۰ ، ۱۰۰
مثال ۲۔ زاویوں کی پیمائش کی تینوں ترکیبوں ستہنی، ہستی اور قوسی میں سے ہر ایک کے موافق کسی معشر منتظم کے ایک زاویہ کی مقدار دریافت کرو
 بموجب اقلیدس م ۱۳۲ نتیجہ صریح، اگر کسی مستقیم الاضلاع کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ پر ۳ قائے زیادہ کردئے جائیں تو اس حاصل جمع میں شکل مذکورہ کی تعداد اضلاع سے دو گئے قائے ہونگے۔
 فرض کرو کہ معشر منتظم کے ایک زاویہ میں لا قائے ہیں۔ اس لئے تمام زاویے ۱۰۰ لا قائوں کے برابر ہوئے۔
 بموجب نتیجہ صریح مذکور بالا۔

$$۲۰ = ۱۱۰ + ۳۰$$

اس لئے لا = $\frac{۱۱۰}{۳}$ قائے

لیکن ایک زاویہ قائمہ = ۹۰ = ۱۰۰ = $\frac{۱۱۰}{۳}$ نیم قطری زاویے

اس لئے زاویہ مطلوب = ۱۳۳ = ۹۰

$$= \frac{۱۳۳}{۳} \text{ نیم قطری زاویے}$$

امثلہ نمبری ۳

ذیل کے زاویوں کو انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

$$۳ - \frac{۱۱۰}{۳} \text{ ق}$$

$$۲ - \frac{۱۱۰}{۳} \text{ ق}$$

$$۱ - \frac{۱۱۰}{۳} \text{ ق}$$

$$۵ - \frac{۱۱۰}{۳} \text{ ق}$$

$$۴ - \frac{۱۱۰}{۳} \text{ ق}$$

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۹ - $\frac{\pi}{5}$ فن ۷ - $\frac{\pi}{4}$ فن ۸ - π فن

ذیل کے زاویوں کو نیمقطری زاویوں میں بیان کرو

۹ - ۹۰ ۱۰ - ۹۰ ۱۱ - ۳۵ ۱۲ - ۳۶ ۱۳ - ۳۹ ۱۴ - ۳۵ ۱۵ - ۳۶

۱۱ - ۳۵ ۱۲ - ۳۶ ۱۳ - ۳۹ ۱۴ - ۳۵ ۱۵ - ۳۶

۱۳ - ۳۹ ۱۴ - ۳۵ ۱۵ - ۳۶

۱۵ - ۳۶ ۱۶ - ۳۵ ۱۷ - ۳۶

۱۷ - ایک مثلث قائمہ الزاویہ کے دو عادی زاویوں کا فرق $\frac{\pi}{2}$ نیمقطری

زاویوں کے برابر ہے۔ ان کو انگریزی درجوں میں بیان کرو

۱۸ - ایک مثلث کا ایک زاویہ $(\frac{\pi}{2})$ ہے، اور دوسرا $(\frac{\pi}{3})$ ہے اور

تیسرا $(\frac{\pi}{6})$ فن ان سب کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۱۹ - کسی مثلث کے زاویوں کا قوسی ناپ بالترتیب $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\pi}{6}$ ہے

تیسرے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۰ - ایک مثلث کے زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے

زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویہ کی نیمقطری

زاویوں کی تعداد سے نسبت ۲۰:۱۱ ہے، ان زاویوں کو انگریزی درجوں میں

دریافت کرو۔

۲۱ - ایک مثلث کے زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے زاوئے

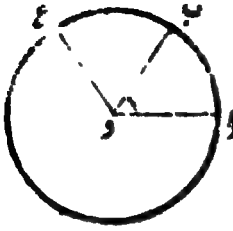
میں جو نیمقطری زاویوں کی تعداد ہے اس کو درمیانی زاویہ کی انگریزی درجوں

کی تعداد کے ساتھ نسبت ۱۲۰:۱ ہے، زاویوں کے قوسی ناپ دریافت کرو۔

۲۲ - اشکال ذیل کے اندرونی زاویوں کو نیمقطری زاویوں اور انگریزی درجوں

میں بیان کرو۔ (۱) مخمس منتظم (۲) مبیع منتظم (۳) مشمن منتظم (۴) بارہ

- اصلاح کی منتظم کثیر الاصلاح (۵) ۱۷ اصلاح کی منتظم کثیر الاصلاح -
- ۲۳ - دو اشکال کثیر الاصلاح منتظم ہیں ایک کے زاویہ کو دوسرے کے زاویہ سے نسبت ۲:۳ ہے نیز پہلی کثیر الاصلاح کی تعداد اصلاح دوسری کی تعداد اصلاح کی دو چند ہے ہر ایک کثیر الاصلاح کی تعداد اصلاح دریافت کرو
- ۲۴ - دو اشکال کثیر الاصلاح کی تعداد اصلاح میں نسبت ۴:۵ ہے ان کے زاویوں کا فرق ۹ ہے ہر ایک کی تعداد اصلاح دریافت کرو
- ۲۵ - دو ایسی اشکال کثیر الاصلاح معلوم کرو جو منتظم ہوں اور جن کی تعداد اصلاح میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہو نیز پہلی کثیر الاصلاح کے ایک زاویے میں جو انگریزی درجوں کی تعداد ہو اُس کو دوسری کثیر الاصلاح کے کسی زاویے کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۴:۵ ہو -
- ۲۶ - ایک ذرا بہتہ الاصلاح کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے بڑا زاویہ سب چھوٹے زاویہ کا دو چند ہے سب سے چھوٹے زاویے کو نیمقطری زاویوں میں تعبیر کرو -
- ۲۷ - اوقات مندرجہ ذیل پر گھنٹہ اور منٹ کی سوئوں کے درمیان جو زاویے بنیں ان کو نیمقطری زاویوں، انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں بیان کرو -
- (۱) ساڑھے تین بجے (۲) چھ بجے میں ۲۰ منٹ (۳) سوا گیارہ بجے
- ۲۸ - وقت معلوم کرو (۱) چار اور پانچ بجے کے درمیان جب گھنٹہ اور منٹ کی سوئوں کے درمیان زاویہ ۵۷° ہو (۲) سات اور آٹھ بجے کے درمیان جب یہ زاویہ ۵۴° ہو -
- ۱۳ - مسئلہ کسی زاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد اُس کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ وہ قوس ہو جس کے محاذی کسی



دائرہ کے مرکز پر زاویہ مجوزہ بنے
اور جن (کسر) کا لاسب نما دائرہ کا
نصف قطر ہو۔

فرض کرو کہ خط دائرہ والا سے شروع
ہو کر مقام وج تک حرکت کرنے سے
زاویہ او ع مرسم کرتا ہے۔

و کو مرکز مان کر کسی نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو جو خطوط وا اور
وج کو نقاط ا اور ع پر قطع کرے۔

فرض کرو کہ > او ب زاویہ نیمقطری ہے یعنی قوس ا ب
نصف قطر دائرہ کے برابر ہے۔

بحکم اقلیدس م ۶ ش ۳۳

$$\frac{\text{زاویہ نیمقطری}}{\text{اوع}} = \frac{\text{اوب}}{\text{اوع}} = \frac{\text{قوس ا ب}}{\text{قوس ا ع}} = \frac{\text{نصف قطر}}{\text{قوس ا ع}}$$

$$\text{یعنی } \text{اوع} = \frac{\text{قوس ا ع}}{\text{نصف قطر}} \times \text{زاویہ نیمقطری}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۳۳۔ مثال ۱۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اس کی ا فٹ قوس
کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ دریافت کرو۔

$$\text{لاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد} = \frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{اس لئے زاویہ مجوزہ} = \frac{1}{3} \text{ نیمقطری}$$

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{11} =$ زاویہ قائمہ
 $\frac{2}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{33} = 0.060606 = \frac{1}{16.5}$ اگر π کو $\frac{22}{7}$ کے
 برابر فرض کیا جائے

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس
 کے مقابل مرکزی زاویہ $33^\circ 15'$ ہو تو قوس کا طول دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ طول مطلوب لا فٹ ہے۔

اس لئے $\frac{1}{5} =$ زاویہ $33^\circ 15'$ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد
 $\pi \frac{33 \frac{1}{4}}{180} =$ (دفعہ ۲۱)

$$\pi \frac{133}{220} =$$

اس لئے لا $\pi \frac{133}{220} =$ فٹ $\frac{22}{7} \times \frac{133}{220} =$ فٹ تقریباً

$$= 2 \frac{65}{22} \text{ فٹ تقریباً}$$

مثال ۳۔ فرض کرو کہ سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ
 ۹۲۵۰۰۰۰ میل ہے اور سورج ایک شخص کی آنکھ پر 32° کا زاویہ بناتا
 ہے سورج کا قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ میلوں میں سورج کا قطر ہے

چونکہ سورج کے محاذی زاویہ نہایت چھوٹا ہے اس لئے اس کا قطر ایک
 ایسے دائرہ کی چھوٹی ٹیسی قوس کے برابر ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ
 ہے۔ نیز میں معلوم ہے کہ اس دائرہ کے مرکز پر سورج کے مقابل زاویہ 32°
 بنتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۲۳

$$\frac{\pi}{925 \dots} = \text{نیمقطری زاویوں کی تعداد } 32 \text{ میں}$$

$$= \text{نیمقطری زاویوں کی تعداد } \frac{8}{15} \text{ میں}$$

$$\frac{22}{445} = \frac{\pi}{180} \times \frac{8}{15} =$$

$$\text{اس لئے } \pi = \frac{180 \dots}{445} \text{ میل}$$

$$= \frac{22}{5} \times \frac{180 \dots}{445} \text{ میل تقریباً}$$

$$= 892 \dots \text{ میل تقریباً}$$

مثال ۳۔ فرض کرو کہ ایک درست بیانی والا شخص چھاپ کے حروف کو اتنے فاصلے سے پڑھ سکتا ہے کہ حروف کے محاذی اس کی آنکھ پر ۵ کا زاویہ بنتا ہے ان حروف کی اونچائی دریافت کرو جو وہ مفصلہ ذیل فاصلوں سے پڑھ سکتا ہے (۱) ۱۲ فٹ (۲) $\frac{1}{2}$ میل فرض کرو کہ لا فٹ مطلوبہ اونچائی ہے۔

پہلی صورت میں لا تقریباً ایک ایسے دائرہ کی قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر ۱۲ فٹ ہے اور جس کے مرکز پر قوس کے محاذی زاویہ ۵ بنتا ہے اس لئے $\frac{\pi}{12} = \text{تعداد نیمقطری زاویوں کی } 5 \text{ میں}$

$$= \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{12} =$$

$$\text{اس لئے لا} = \frac{\pi}{180} \text{ فٹ} = \frac{22}{5} \times \frac{1}{180} \text{ فٹ تقریباً}$$

$$= \frac{22}{5} \times \frac{1}{180} \text{ انچ} = \frac{1}{5} \text{ انچ تقریباً}$$

دوسری صورت میں اگر اونچائی ما ہو تو

$$= \frac{1}{3 \times 34} \text{ تعداد نیمقطری زاویوں کی } 5 \text{ میں}$$

$$\frac{\pi}{180} \times \frac{1}{12} =$$

اس لئے $\pi \times \frac{11}{18} = \pi \frac{11}{18} = ۱$ فٹ تقریباً

$$۲۳ = \text{ایچ تقریباً}$$

۱۔ مثلہ نمبری ۴

[فرض کرو کہ $\pi = ۳.۱۴۱۵۹.....$ اور $\frac{1}{12} = ۰.۰۸۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳$ و
۱۔ کسی دائرہ میں ایک قوس کا طول نصف قطر کا ۳.۵ گنا ہے اس کے
محاذی مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو
۲۔ کسی دائرہ کا نصف قطر ۲۵ فٹ ہے، ایک ۵ فٹ قوس کے
محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں نیمقصری زاویوں اور انگریزی
درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک دائرہ کے بیرونی کنارہ پر درجے بنے ہوئے ہیں، اس میں
ہر ایک درجہ کی زاویہ کی قیمت ۵ ہے اور آپس میں درجوں کا فاصلہ
او ایچ ہے، دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴۔ ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ۶ فٹ ہے اور ہر ایک درجہ کی زاویہ
قیمت ۵ ہے، متصل درجوں کا فاصلہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر ایک کرہ کے ایک ہی نصف النہار پر دو مقامات کے عرضوں کا
فرق ۱۰° ہو اور مقامات کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{4}$ ایچ ہو تو کرہ کا نصف قطر
دریافت کرو۔

۶۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔ دو ایسے مقامات کے عرض بلد

کا فرق معلوم کرو جن میں سے ایک مقام دوسرے مقام کی نسبت ۱۰۰ میل شمال کی طرف واقع ہو۔

۷۔ فرض کرو کہ زمیں ایک کرہ ہے اور اس کے دائرہ متوازی العرض کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{4}$ ۶۹ میل ہے اور اس فاصلہ کے محاذی زمیں کے مرکز پر زاویہ ۹۱ بنتا ہے، زمین کا نصف قطر دریافت کرو۔

۸۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے وتر کا طول بھی ۳ فٹ ہو تو قوس کے طول کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ دو دائروں کے مرکزدں پر مساوی قوس کے محاذی زاوئے ۹۰ اور ۷۵ بنتے ہیں اُن کے نصف قطروں کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک دائرہ کا قطر ۸ فٹ ہے اگر اس کی ۱۰ فٹ قوس کے محاذی مرکزی زاویہ ۱۴۳ ۱۴۲ ۲۲ بنے تو ۲۲ کی قیمت ۴ مرتبہ کے احشاء تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے محیط کو ایسے پانچ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اگر سب سے بڑا حصہ سب سے چھوٹے کا ۶ گنا ہو تو حصوں کے محاذی مرکزی زاویوں کی مقداروں کو مختصر زاویوں میں دریافت کرو۔

۱۲۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا مجموعہ ایک ایسی نصف دائرہ قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو دائرہ کا ہے، قطاع کے زاویہ کو انگریزی درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱۳۔ ایک آدمی کا قد ۶ فٹ ہے کتنے فاصلہ پر اس کے محاذی ۱۰ کا زاویہ بنے گا؟

۱۴۔ ایک شے کے محاذی ایک میل کے فاصلہ پر آکا زاویہ بنتا ہے

اُس کی اونچائی دریافت کرو۔

۱۵- ایک کرہ کا قطر $\frac{1}{2}$ ۵ پانچ ہے ، معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۶ کا زاویہ بنے گا ؟

۱۶- ایک مینار کی اونچائی ۵۱ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ $\frac{1}{2}$ ۵ بنتا ہے ، مینار اور آنکھ کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۷- کسی گرجے کے مینار کی اونچائی ۱۰۰ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ ۹ بنتا ہے آنکھ اور گرجے کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۸- ایک سطح پل کا چڑاؤ ۲۱۰ گز طول میں $\frac{1}{2}$ ۳ فٹ ہے سطح انقی سے اُس کے میلان کی تقریبی قیمت دقیقوں میں معلوم کرو۔

۱۹- فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے اور چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا ہے اگر چاند کا نصف قطر زمین پر زاویہ ۱۶ بنائے تو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۰- جب کسی خاص مقام پر چاند غروب ہو رہا ہو تو زمین کا نصف قطر جو مقام مختص میں سے گزرتا ہے چاند کے مرکز پر ۷۶ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل فرض کیا جائے تو چاند اور زمین کے فاصلے کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۱- فرض کرو کہ زمین کے نصف قطر کے محاذی سورج کے فاصلے پر زاویہ ۸۷۶ بنتا ہے اور ایک جزائی میل کے مقابل زمین کے مرکز پر زاویہ ۱ بنتا ہے تو ثابت کرو کہ سورج کا فاصلہ زمین سے تقریباً

۸۱۰ لاکھ جغرافی میل ہے نیتھری زمین کا قطر اور محیط دونوں جغرافی میلوں میں دریافت کرو۔

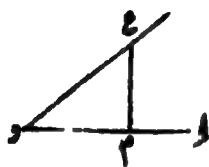
۴۴۔ مدار زمین کا نصف قطر ۹۲۴۰۰۰۰۰ میل ہے اور اُس کے محاذی شاره مشعرئی (سرریس) پر زاویہ ۴۵° بنتا ہے شاره کا فاصلہ تقریباً دریافت کرو۔



باب دوم

ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہیں

۲۵۔ اس باب میں ہم صرف اُن زاویوں کے متعلق بحث کریں گے جو زاویہ قائمہ سے کم ہوں۔



فرض کرو کہ ایک خط دائرہ مقام
و ا سے چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر
پہنچتا ہے۔ اور زاویہ ا و ع مرتب
کرتا ہے۔ خط دائرہ پر ایک نقطہ
ع مقرر کرو اور خط ابتدائی و ا پر
اس سے عمود نکالو۔

مثلث م و ع میں و ع وتر ہے، ع م عمود اور و م قاعدہ۔
زاویہ ا و ع کی مثلثی نسبتوں یا جملوں کی تعریف اکثر اس طرح کرتے ہیں

م و ع	یعنی	عمود	کو جیب	زاویہ ا و ع کی کہتے ہیں
و ع		وتر		
م و ع	”	قاعدہ	کو جیب	التمام زاویہ ا و ع کی کہتے ہیں
و ع		وتر		
م و ع	”	عمود	کو مماس	زاویہ ا و ع کا کہتے ہیں
و م		قاعدہ		
م و ع	”	قاعدہ	کو مماس	التمام زاویہ ا و ع کا کہتے ہیں
و م		عمود		

$\frac{\text{دوع}}{\text{م دوع}}$ یعنی $\frac{\text{دتر}}{\text{م دوع}}$ کو قاطع التام زاویہ دوع کا کہتے ہیں

$\frac{\text{دوع}}{\text{م دوع}}$ ~ $\frac{\text{دتر}}{\text{قاعدہ}}$ کو قاطع " " " " " "

اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب التام ایک سے کم ہو یعنی مقدار
۱۔ جم دوع کو سہم الجیب یا جیب معکوس زاویہ دوع کی کہتے ہیں۔

نیز اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب زاویہ ایک سے کم ہو یعنی
۱۔ جب دوع کو سہم التام زاویہ دوع کا کہتے ہیں۔

۲۴۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مشقی نسبتیں سب اعداد ہیں۔
اد پر کی آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں
جب دوع، جم دوع، مس دوع، مم دوع، قم دوع،
قط دوع، سم دوع، سم دوع۔

آخری دو نسبتیں شاذ و نادر استعمال ہوتی ہیں
۲۵۔ تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التام جیب کا متکافی
مقلوب ہے۔

یعنی قم دوع = $\frac{1}{\text{جب دوع}}$

اسی طرح سے قاطع زاویہ جیب التام کا مقلوب ہے یعنی

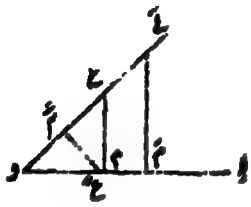
قط دوع = $\frac{1}{\text{جم دوع}}$

اور ماس التام ماس کا مقلوب ہے یعنی

ثم ادع - مس ادع

۲۸- ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی
یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔

یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر
خط دائرہ وع میں کوئی اور نقطہ ع



لیا جائے اور اس سے وا پر عمود

ع م نکالا جائے تو مثلثی نسبتیں جو

مثلثات وع م اور وع م سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں جدا گانہ ایک
دوسرے کے برابر ہونگی۔

ان مثلثوں میں زاویہ مشترک ہے م اور م پر کے دونوں
زاوے قائمے ہیں۔ معلوم ہوا کہ یہ مثلث متشابه ہیں اور اسلئے
بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴، $\frac{م ع}{وع} = \frac{م ع}{وع}$ جس سے ثابت ہوا کہ

زاویہ ادع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خط دائرہ
پر لیا جائے۔

اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

$$\frac{وم}{وع} = \frac{وم}{وع} \quad \text{اور} \quad \frac{م ع}{وم} = \frac{م ع}{وم}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جیب التمام اور ماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے
ہیں خواہ نقطہ خط دائرہ پر کہیں لیا جائے اور باقی نسبتوں کی بھی

یہی کیفیت ہے۔

اگر وہ خط دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ سے دو برمودہ \angle م نکالیں تو مثلث \angle م سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں۔

کیونکہ دو مثلثات \angle م اور \angle م میں زاویہ مشترک ہے اور زاوے \angle م اور \angle م کا \angle م سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزاویہ اور اسلئے متشابه ہیں۔ اس لئے

$$\frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle} \text{ اور } \frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle}$$

۳۹۔ مثلثی نسبتوں کے اساسی ارتباطات یہ ہیں آگے چلکر معلوم ہو گا کہ اگر کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تو باقی سب نسبتوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ط زاویہ \angle کو تعبیر کرتا ہے۔ [ط کو ہم "تاہ پڑھیں گے"]



مثلث \angle م میں بحکم اقلیدس
م اش ۴۷

$$\angle = \angle + \angle = \angle \dots (1)$$

\angle پر تقسیم کرنے سے

$$1 = \left(\frac{\angle}{\angle}\right) + \left(\frac{\angle}{\angle}\right)$$

یعنی (جب ط) + (جم ط) = ۱

مقدار (جب ط) کو جب ط^۲ لکھتے ہیں اور اسی طرح باقی سب نسبتوں کو۔

پس یہ ربط حاصل ہوا جب ط^۲ + جم ط^۲ = ۱ (۲)

نیز طرفین مساوات (۱) کو دم^۲ پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{مجم}}{\text{دم}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{دع}}{\text{دم}}\right)^2$$

یعنی (مس ط) = ۱ + (قط ط)^۲

پس قط ط^۲ = ۱ + مس ط^۲ (۳)

طرفین مساوات (۱) کو م ع^۲ پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{دع}}{\text{م ع}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{دم}}{\text{م ع}}\right)^2$$

یعنی ۱ + (مم ط)^۲ = (قم ط)^۲

پس قم ط^۲ = ۱ + مم ط^۲ (۴)

نیز چونکہ جب ط = $\frac{\text{م ع}}{\text{دع}}$ اور جم ط = $\frac{\text{دم}}{\text{دع}}$

اس لئے جم ط = $\frac{\text{جم ط}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{م ع}}{\text{دع}} \div \frac{\text{دم}}{\text{دع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{دم}} = \text{مس ط}$

اس لئے مس ط = $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}}$ (۵)

اور اسی طرح سے مم ط = $\frac{\text{جم ط}}{\text{جب ط}}$ (۶)

۱۳۔ مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{1-j}{1+j}} = \frac{1-j}{1+j}$ قم ۱۔ مم ۱

$$\sqrt{\frac{1-j}{1+j}} = \frac{1-j}{1+j}$$

بوجب نتیجہ (۲) دفعہ آخر $\frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$

$$\frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{1-j}{1+j}} = \frac{1-j}{1+j}$ مس ۱ + مم ۱

ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ $\frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$ مس ۱ + مم ۱

اور $\frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$ مم ۱ + مس ۱

اس لئے $\frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$ مس ۱ + مم ۱ + مم ۱ + مس ۱

$$= \frac{1-j}{1+j} + \frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$$

$$= \frac{1-j}{1+j}$$

اس لئے $\sqrt{\frac{1-j}{1+j}} = \frac{1-j}{1+j}$ مس ۱ + مم ۱

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{1-j}{1+j}\right) \left(\frac{1-j}{1+j}\right) = 1$ مس ۱ + مم ۱ = ۱

حلولہ جملہ $\left(\frac{1-j}{1+j}\right) \left(\frac{1-j}{1+j}\right) = 1$

$$\frac{1-j}{1+j} \times \frac{1-j}{1+j} = 1$$

$$= 1$$

امثلہ نمبری ۵

ارتباطات ذیل کو ثابت کرد

- ۱- $\text{جم}^2 - \text{جب}^2 = 1 + 2 \text{جم}^2$
- ۲- $(\text{جب} + \text{جم})(1 - \text{جب} + \text{جم}) = \text{جب}^2 + \text{جم}^2$
- ۳- $\frac{\text{جب}^2}{1 + \text{جم}} + \frac{1 + \text{جم}}{\text{جب}^2} = 2 \text{جم}^2$
- ۴- $\text{جم}^2 + \text{جب}^2 = 1 - 3 \text{جب}^2 \times \text{جم}^2$
- ۵- $\sqrt{\frac{1 - \text{جب}^2}{1 + \text{جب}^2}} = \text{قط} - \text{مس}$
- ۶- $2 \text{قط} = \frac{\text{جم}^2}{1 + \text{جم}^2} + \frac{\text{جم}^2}{1 - \text{جم}^2}$
- ۷- $\text{جم} = \frac{\text{جم}^2}{\text{مس} + \text{جم}}$
- ۸- $(\text{قط} + \text{جم})(\text{قط} - \text{جم}) = \text{مس}^2 + \text{جب}^2$
- ۹- $\text{جب} + \text{جم} = \frac{1}{\text{مس} + \text{جم}}$
- ۱۰- $\text{قط} - \text{مس} = \frac{1}{\text{مس} + \text{قط}}$
- ۱۱- $\frac{1 - \text{مس}^2}{1 + \text{مس}^2} = \frac{\text{مس} - 1}{\text{مس} + 1}$
- ۱۲- $\frac{1 + \text{مس}^2}{1 + \text{جم}^2} = \frac{\text{جب}^2}{\text{جم}^2}$

$$۱۳ - \frac{\text{قط}^۱ - \text{مس}^۱}{\text{قط}^۱ + \text{مس}^۱} = ۱ - ۲ \frac{\text{قط}^۱ \text{مس}^۱}{۲ + \text{مس}^۱}$$

$$۱۴ - \frac{\text{مس}^۱}{۱ - \text{مم}^۱} + \frac{\text{مم}^۱}{۱ - \text{مس}^۱} = \text{قط}^۱ \text{قم}^۱ + ۱$$

$$۱۵ - \frac{\text{جم}^۱}{۱ - \text{مس}^۱} + \frac{\text{جب}^۱}{۱ - \text{مم}^۱} = \text{جب}^۱ + \text{جم}^۱$$

$$۱۶ - (\text{جب}^۱ + \text{جم}^۱) (\text{مم}^۱ + \text{مس}^۱) = \text{قط}^۱ + \text{قم}^۱$$

$$۱۷ - \text{قط}^۱ - \text{قط}^۲ = \text{مس}^۱ - \text{مس}^۲$$

$$۱۸ - \text{مم}^۱ + \text{مم}^۲ = \text{قم}^۱ - \text{قم}^۲$$

$$۱۹ - \sqrt{۱ - \text{قم}^۲} = \text{جم}^۱ \text{قم}^۱$$

$$۲۰ - \text{قط}^۱ \text{قم}^۱ = \text{مس}^۱ + \text{مم}^۱ + ۲$$

$$۲۱ - \text{مس}^۱ - \text{جب}^۱ = \text{جب}^۲ \text{قط}^۱$$

$$۲۲ - (۱ + \text{مم}^۱ - \text{قم}^۱) (۱ + \text{مس}^۱ + \text{قط}^۱) = ۲$$

$$۲۳ - \frac{۱}{\text{قم}^۱ - \text{مم}^۱} - \frac{۱}{\text{جب}^۱} = \frac{۱}{\text{جب}^۱} - \frac{۱}{\text{قم}^۱ + \text{مم}^۱}$$

$$۲۴ - \frac{\text{مم}^۱ + \text{جم}^۱}{\text{مم}^۱ + \text{جم}^۱} = \frac{\text{مم}^۱ - \text{جم}^۱}{\text{مم}^۱ + \text{جم}^۱}$$

$$۲۵ - \frac{\text{مم}^۱ + \text{مس}^۱}{\text{مم}^۱ + \text{مس}^۱} = \frac{\text{مم}^۱ + \text{مس}^۱}{\text{مم}^۱ + \text{مس}^۱}$$

$$۲۶ - \left(\frac{۱}{\text{قم}^۱ - \text{جب}^۱} + \frac{۱}{\text{جم}^۱ - \text{جب}^۱} \right) = \frac{۱ - \text{جم}^۱ \text{جب}^۱}{۲ + \text{جم}^۱ \text{جب}^۱}$$

$$۲۷ - \text{جب}^۱ - \text{جم}^۱ = (\text{جب}^۱ - \text{جم}^۱) (۱ - ۲ \text{جب}^۱ \text{جم}^۱)$$

$$۲۸ - \frac{\text{جم}^۱ \text{قم}^۱ - \text{جب}^۱ \text{قط}^۱}{\text{جم}^۱ + \text{جب}^۱} = \text{قم}^۱ - \text{قط}^۱$$

$$۲۹ - \frac{\text{مس} + \text{قط} - ۱}{\text{مس} - \text{قط} + ۱} = \frac{۱ + \text{جب} + \text{جم}}{\text{جم}}$$

$$۳۰ - (\text{مس} + \text{قم} - ۲) - (\text{جم} - \text{قط} - ۲) = ۲ \text{ مس} - \text{جم} + (\text{قم} + \text{قط} - ۲)$$

$$۳۱ - ۲ \text{ قط} - \text{قط} - ۲ \text{ قم} = ۲ \text{ قم} + \text{قم} - ۲ \text{ مس} - \text{مس} - ۲$$

$$۳۲ - (\text{جب} + \text{قم} - ۲) + (\text{جم} + \text{قط} - ۲) = ۲ \text{ مس} - \text{مس} + \text{قم} - ۲ + ۲$$

$$۳۳ - (\text{قم} + \text{جم} - ۱) - (\text{سم} - \text{قط} + \text{مس} - ۱) = (\text{سم} - ۱) - (\text{قط} - ۱) - (\text{سم} - ۱) - (\text{سم} - ۱)$$

$$۳۴ - (۱ + \text{جم} + \text{مس} - ۱) - (\text{جب} - ۱ - \text{جم} - ۱) = \frac{\text{قط} - ۱}{\text{قم} - ۱} - \frac{\text{قط} - ۱}{\text{قم} - ۱}$$

$$۳۵ - ۲ \text{ سم} + \text{جم} - ۱ = ۱ + \text{سم} - ۱$$

۳۱ - مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کی حدود

مسادات (۲) دفعہ ۲۹ سے

$$\text{جب}^۲ + \text{جم}^۲ = ۱$$

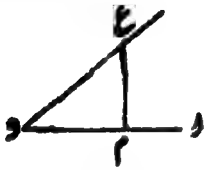
اب چونکہ جب^۲ اور جم^۲ دونوں مربعے ہیں اس لئے ضروری ہے کہ وہ مثبت ہوں اور چونکہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔ اس لئے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی بھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

[کیونکہ اگر ان میں سے ایک مربع مثلاً جب^۲ ایک سے بڑا ہو تو ضرور ہے کہ دوسرا منفی ہو اور یہ غیر ممکن ہے]

پس معلوم ہوا کہ جیب اور جیب التمام دونوں میں سے کوئی بھی تعداداً ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

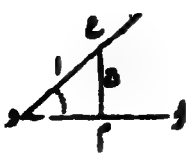
اب چونکہ جب طہ ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی اس لئے قہ طہ
 جہ جب طہ کے برابر ہے ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔
 اسی طرح سے قہ طہ جہ جہ طہ کے برابر ہے تہ ادا ایک سے کم
 نہیں ہو سکتا۔

۳۴ - شکل دہ بنا سے نتائج مذکورہ بالا باستانی حاصل ہوتے
 ہیں۔ کیونکہ زاویہ اوج کی خواہ کچھ ہی
 قیمت ہو اصطلاح و م اور م ع
 طول میں دتروع سے کسی زیادہ نہیں
 ہو سکتے۔



اب چونکہ م ع دتروع سے کبھی بڑا نہیں ہو سکتا اس لئے
 نسبت فیج ایک سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی، اس سے ظاہر
 ہے کہ جیب زاویہ ایک سے کبھی بڑھ نہیں سکتی۔
 نیز چونکہ و م دتروع سے ہمیشہ کم رہتا ہے اس لئے نسبت
 و م ایک سے ہمیشہ کم رہے گی یعنی جیب تمام ایک سے کبھی
 زیادہ نہ ہوگی۔

۳۵ - ہم کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو کسی ایک نسبت کی رقوم
 میں بیان کر سکتے ہیں، اس ترکیب عمل کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی۔
 مثال ۱ - کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو جیب کی رقوم میں بیان کرو
 فرض کرد کہ اوج کوئی زاویہ طہ ہے



اور و م کا طول ایک ہے اور م ع
 کا متناسب طول ج ہے۔

اقلیدس م اشءم سے نوم = م اوع - م ع = م ا - ج

اس لئے جب ط = $\frac{م}{دع} = \frac{ج}{ا} = ج$

$$\text{جم.ط} = \frac{\text{د.ع}}{\text{ج.ا}} = \sqrt{1 - \text{ج.ا}} = \sqrt{1 - \text{ج.ط}}$$

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{۱۸ - جب طہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{۱۸ - ج}} = \frac{\text{موم}}{\text{وم}} = \text{مس طہ}$$

$$\frac{\sqrt{1 - \text{جیب ط}}}{\text{جیب ط}} = \frac{\sqrt{1 - \text{ج}}}{\text{ج}} = \frac{\text{م}}{\text{م ط}} = \text{م م ط}$$

$$\text{قمرطه} = \frac{\text{دع}}{\text{مع}} = \frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{جب طه}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{ج}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ج}^2}} = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = \text{تظط}$$

آفری پانچ مساواتوں سے جو کچھ مطلوب تھا حاصل ہوا

مثال ۲۔ سب مثلثی نسبتوں کو عباس التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

حسب معمول شکل بناؤ اور فرض کرو کہ م م ع

کا طول ایک ہے اور دم کا متناسب

طول لای ہے

اقلیدس ماضی ۴۷ سے

$$\sqrt{y+1} = \sqrt{4m+1} = 2m+1$$

اس لئے $\frac{y}{x} = \frac{m}{c} = \frac{m}{c}$ = ممط = لا

$$\text{جب ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{د ع}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{وم}}{\text{دع}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{دع}}{\text{وم}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}}$$

$$\text{اور قم ط} = \frac{\text{دع}}{\text{م ع}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{م} + 1\frac{1}{2}}}$$

جو کچھ مطلوب تھا آخری پانچ مساواتوں سے حاصل ہوا
یاد رہے کہ اوپر کی ہر ایک صورت میں اُس کسر کا نسب نہ جسکی
رقوم میں باقی مثلثی نسبتوں کو بیان کرنا مطلوب ہے ہمیشہ ایک
لیا گیا ہے مثلاً زاویہ ط کی جیب $\frac{\text{م ع}}{\text{وم}}$ ہے۔ اسلئے مثال ۱ میں
نسب نامہ کا طول ایک کے برابر لیا گیا ہے اور چونکہ ماس التمام $\frac{\text{وم}}{\text{م ع}}$
ہے اسلئے مثال ۲ میں ضلع م ع کو ایک کے مساوی فرض کیا ہے۔
اسی طرح سے اگر باقی مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں
بیان کرنا ہو تو چونکہ جیب التمام $\frac{\text{وم}}{\text{م ع}}$ ہے اس لئے وع کو ایک
کے برابر فرض کرنا چاہیئے اور وم کو لا کے، اس کے بعد عمل
بالکل ایسا ہی ہوگا جیسا کہ مثلہ ۱ اور ۲ میں ہوا۔
مثلہ ذیل میں اضلاع کی قیمتیں عددی ہیں
مثال ۳۔ اگر جم ط = $\frac{۳}{۵}$ تو باقی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

خط ابتدائی واپر دم برابر ۳ کے ۱ اور ایک عمود مہر کھینچو، نیز فرض کرو کہ ایک خط دے جس کا طول ۵ ہے نقطہ د کے گرد چکر لگاتا ہوا عمود مہر کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہے تب اوج زاویہ مجوزہ ہوگا

بحکم اقلیدس م اش ۴، م ع = ۱۰ و ع ۲ - و م ۲ = ۱۰ و م ۳ - و م ۴ = ۴
اس لئے صرفاً

جب ط = $\frac{2}{3}$ ، مس ط = $\frac{2}{3}$ ، مم ط = $\frac{2}{3}$ ، قم ط = $\frac{2}{3}$ اور قسط ط = $\frac{2}{3}$
 مثال ۴۔ اگر زاویہ ط کی جیب $\frac{1}{2}$ ہو تو باقی مثلثی نسبتوں کی عددی
 قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اس لئے ربط (۲) دفعہ ۲۹ سے ظاہر ہے کہ

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

یعنی $\frac{1}{9} = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$

یعنی حجم = $\frac{242}{3}$

$$\frac{72}{3} = \frac{1}{212} = \frac{\text{جہتہ}}{\text{جہمہ}} = \text{اٹنے مسہ}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\text{مس}} = \text{مم}$$

قمر = $\frac{1}{\text{حب طر}}$ = ۳

$$\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

مساحت = ۱ - حجم = ۱ - $\frac{25}{3}$

$$\text{سم } \Gamma = 1 - \text{حیبت } \Gamma = 1 - \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

۳۴۔ نقشہ ذیل میں پرزنتی نسبت کو باقی سب نسبتوں کی قوم میں بیان کیا گیا ہے

امثلہ نمبری ۶

- ۱- سب مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرو
- ۲- سب نسبتوں کو مماس کی رقوم میں بیان کرو
- ۳- سب نسبتوں کو قاطع التمام کی رقوم میں بیان کرو
- ۴- سب نسبتوں کو قاطع الزاویہ کی رقوم میں بیان کرو
- ۵- ایک زاویہ کی جیب $\frac{1}{2}$ ہے اسکی اور مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔
- ۶- اگر جیب ط = $\frac{12}{13}$ تو مس ط اور سم ط کی قیمتیں دریافت کرو
- ۷- اگر جیب ط = $\frac{11}{14}$ تو مس ط ، جم ط اور قط ط دریافت کرو
- ۸- اگر جم ط = $\frac{5}{6}$ تو معلوم کرو جیب ط اور مم ط
- ۹- اگر جم ا = $\frac{9}{11}$ تو مس ا اور قم ا دریافت کرو
- ۱۰- اگر مس ط = $\frac{3}{4}$ تو زاویہ ط کی جیب ، جم ، سم اور قم دریافت کرو
- ۱۱- اگر مس ط = $\frac{1}{2}$ تو قم ط - قط ط کی قیمت دریافت کرو
- ۱۲- اگر جم ط = $\frac{15}{8}$ تو جم ط اور قم ط کی قیمتیں دریافت کرو
- ۱۳- اگر قط ا = $\frac{3}{4}$ تو معلوم کرو مس ا اور قم ا -
- ۱۴- اگر ۲ جیب ط = ۲ - جم ط تو جیب ط دریافت کرو۔
- ۱۵- اگر ۸ جیب ط = ۴ + جم ط تو معلوم کرو جیب ط -
- ۱۶- اگر مس ط + قط ط = ۱۵ تو معلوم کرو جیب ط
- ۱۷- اگر مم ط + قم ط = ۵ تو معلوم کرو جم ط -

اگر $۳ ط = ۸ + ۱۰ ط$ تو مس ط کی قیمت دریافت کرو۔

اگر $مس ط + قط ط = ۵$ تو معلوم کرو حجم ط

اگر $مس ط + مم ط = ۲$ تو معلوم کرو جب ط۔

اگر $قط ط = ۲ + ۲ مس ط$ تو معلوم کرو مس ط۔

اگر $مس ط = \frac{۲(۱+لا)}{۱+لا۲}$ تو معلوم کرو جب ط اور حجم ط

۔ اب ہم چند کار آمد زادیوں کی مثلی نسبتیں دریافت کریں گے،
ت میں یہ اکثر استعمال ہوتی ہیں۔ طالب علم کو ان سے
واقف ہونا چاہیئے مگر سب سے پہلے ہم ”لاتناہی“ کے
یان کریں گے۔

ہ۔ ہماری موجودہ اغراض کے لئے یہ تعریف کافی ہوگی کہ
مناہی ایک ایسا عدد ہے جو کسی اور عدد سے جو بیان
، پاؤہن میں آسکے بڑا ہو، اس کو ہم علامت ∞ سے تعبیر
کے۔

سے سے بڑے عدد کا تصور باندھنا محض ناممکن ہے کیونکہ
سے عدد کا خیال میں آنا ممکن ہو تو اُس سے بڑے عدد کے
میں کیا مشکل ہو سکتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ
مناہی بڑا عدد کیوں نہ لیا جائے وہ لاتناہی سے ہمیشہ
میکا۔ پس ایسے بیانات مثلاً $\infty = \infty$ کا یہ مطلب ہرگز نہیں
مناہی کی کوئی خاص قیمت ہے اور لا اُس کے برابر ہے
اولات لا $\infty = \infty$ اور ما $\infty = \infty$ سے یہ نتیجہ لازماً صادق نہیں

آسانکہ لا = ۱

تعریف۔ صفروہ عدد ہے جو ایک کی ہر ایک کسر مقررہ سے کم ہو۔ مقدار محدود وہ ہے جو نہ تو صفر ہو اور نہ مقدار غیر متناہی۔
 اگر کسی محدود مقدار کو صفر پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت مقدار غیر متناہی کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ a کوئی مقدار محدود ہے ہم یہ ثابت کریں گے کہ a بے صفر ایک ایسی مقدار کے برابر ہے جو ہر ایک مقدار محدود (مثلاً n) سے جو ہمارے ذہن میں آئے بڑی ہے۔

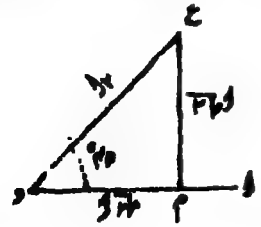
a کو صفر پر تقسیم کر دو اور n کو خارج قسمت ٹھہراؤ (ن) $\frac{a}{n}$
 اب چونکہ $a > n$ اسلئے باقی ہے

پس معلوم ہوا کہ خواہ کتنا بڑا عدد (n) بطور خارج قسمت کے لیا جائے a ہمیشہ باقی بچے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ نسبت a بے صفر ہر ایک عدد سے بڑی ہے خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$a \div 0 = \infty$$

اور اگر مقدار غیر متناہی نہ ہو تو $a \div 0 = \infty$

چند کارآمد صورتوں میں مثلی نسبتوں کی قیمتیں



۳۷ - ۴۵° کا زاویہ
 فرض کرو کہ زاویہ مرتبہ $45^\circ = 90^\circ$
 اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں

زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے

$$\text{زاویہ دغ م} = ۱۸۰ - \text{زاویہ ع م} - \text{زاویہ ع م و}$$

$$= ۱۸۰ - ۴۵ - ۹۰ = ۴۵ = \text{زاویہ ع و م}$$

$$\therefore \text{م} = \text{م ع}$$

اگر دغ کو ۱۲ کے برابر فرض کریں تو

$$۱۲ = \text{دغ} = \text{وم} + \text{م ع} = ۲ \times \text{وم}$$

$$\text{یعنی } \text{وم} = ۶$$

$$\text{اس لئے جب } ۴۵ = \frac{\text{م ع}}{\text{دغ}} = \frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۱}{۱}$$

$$\text{جم } ۴۵ = \frac{\text{وم}}{\text{دغ}} = \frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۱}{۱}$$

اور مس ۴۵ = ۱

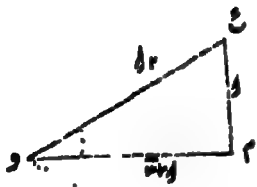
۳۸ - ۳۰ کا زاویہ

فرض کرو کہ ۳۰ کا زاویہ م دغ

ہے، ع م کو ع تک خارج کرو

اور م ع کو ع م کے برابر

بناؤ۔



مثلت دغ م ع اور دغ م ع میں

اضلاع دغ م اور م ع اضلاع دغ م ع کے بالترتیب برابر

ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس لئے

$$\text{دغ} = \text{دغ اور زاویہ دغ ع} = \text{زاویہ دغ ع} = ۹۰$$

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث ع و م متساوی الاضلاع ہے۔

آپنا کہ لا = ۱

تعریف۔ صفر وہ عدد ہے جو ایک کی ہر ایک کسر مقررہ سے کم ہو۔ مقدار محدود وہ ہے جو نہ تو صفر ہو اور نہ مقدار غیر متناہی۔

۱۱۱۔ اگر کسی محدود مقدار کو صفر پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت مقدار غیر متناہی کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ a کوئی مقدار محدود ہے ہم یہ ثابت کریں گے کہ $a \div 0$ صفر ایک ایسی مقدار کے برابر ہے جو ہر ایک مقدار محدود (مثلاً n) سے جو ہمارے ذہن میں آئے بڑی ہے۔

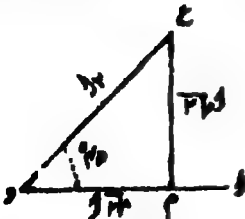
a کو صفر پر تقسیم کر دو اور n کو خارج قسمت ٹھہراؤ (ن) $\frac{a}{0}$ اب چونکہ $0 \times n =$ اس لئے باقی ہے

پس معلوم ہوا کہ خواہ کتنا بڑا عدد (n) بطور خارج قسمت کے لیا جائے ہمیشہ باقی بچے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ نسبت $a \div 0$ صفر ہر ایک عدد سے بڑی ہے خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$a \div 0 = \infty$$

اور اگر مقدار غیر متناہی نہ ہو تو $a \div \infty = 0$ ۔

چند کارآمد صورتوں میں مثلی نسبتوں کی قیمتیں



۳۷۔ ۴۵° کا زاویہ

فرض کرو کہ زاویہ مرتبہ $a \div c = 45^\circ$

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں

زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے

$$\text{زاویہ } \angle م = ۱۸۰ - \text{زاویہ } \angle ع - \text{زاویہ } \angle و$$

$$= ۱۸۰ - ۴۵ - ۹۰ = ۴۵ = \text{زاویہ } \angle و$$

$$\therefore \angle م = \angle و$$

اگر دو کوا ۲ کے برابر فرض کریں تو

$$۳۱ = ۱ = \angle و = \angle م = ۲ \times \angle و$$

$$\text{یعنی } \angle و = ۳۱$$

$$\text{اس لئے جب } ۴۵ = \frac{\angle م}{\angle و} = \frac{۱۳۱}{۱۲} = \frac{۱}{۲۱}$$

$$\text{جم } ۴۵ = \frac{\angle و}{\angle م} = \frac{۱۳۱}{۱۲} = \frac{۱}{۲۱}$$

$$\text{اور مس } ۴۵ = ۱$$

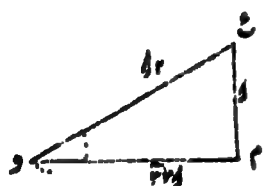
۳۸ - ۳۰ کا زاویہ

فرض کرو کہ ۳۰ کا زاویہ $\angle م$ و

ہے، $\angle م$ کو $\angle م$ تک خدج کرو

اور $\angle م$ کو $\angle م$ کے برابر

بناؤ۔



مثلاً $\angle م$ اور $\angle و$ میں

اضلاع $\angle م$ اور $\angle و$ اضلاع $\angle م$ اور $\angle و$ کے بالترتیب برابر ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس لئے

$$\angle و = \angle و \text{ اور } \angle و = \angle م = \angle و = ۴۰$$

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث $\angle و$ متساوی الاضلاع ہے۔

اب اگر وع کا طول ۵۲ ہو

$$1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \quad ;$$

[illegible]

۲. جب $\frac{1}{p} = \frac{2}{q} = \frac{3}{r}$

$$\frac{34}{2} = \frac{134}{14} = \frac{52}{2} = 26$$

اور مس ۲۰ = $\frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۵}$

۴۹ - ۴۰ کا جواب

فرض کرو کہ ۶۰ کا زاویہ اوج ہے

دایر ایک ایسا نقطہ ن لو کہ

من = وم = ۱ (فرض کرو)

اب مثلث وم ع کے اضلاع

وم اور مع مختلف ان مع کے

اضلاع ان م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاوے قائمے ہیں۔ اس سے معلوم ہوا کہ مثلث باہم مساوی ہیں۔

اس لئے عن = وجہ اور

ع ۴۰ = ع ۴۱ = ع ۴۲

اس سے ثابت ہوا کہ مثلث و عن متساوی الاضلاع ہے۔

اس لئے $\text{وع} = \text{ون} = ۲$ دم = ۱۲

$$\sqrt{1 \times 1} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

$$\frac{3}{2} = \frac{13}{12} = \frac{2}{2} = 1. \text{ جب } 4 =$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} = \frac{r_2}{r_1 r_2} = \frac{r_2}{r_1} = 40$$

$$F_2 = \frac{\text{بیب } 40}{\text{جم } 40} = 1 \text{ س}$$

۱. مسفر درجه (:) کا زاویہ -

نہ کر کہ خط دائرہ و معنے و

دگو منے سے نہایت ہی

ہاویہ پیدا کیا ہے۔

فی فرض کرو کہ زاویہ m و n نہایت چھوٹا ہے

اگر ہے کہ مقدار ع م نہایت ہی قلیل ہے اور ابتدا میں جب

نے اس زاویہ کا ترسہ کرنا عین شروع ہی کیا تھا تو اس وقت

ر م ع ہر مقدار معینہ کے کم مٹی یعنی ایک ایسی مقدار مٹی

ہم صغریٰ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ

اوج و اتنی صغر کے برابر ہے

ۛ صورت میں دم اور دھ

قطاع اور م) ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور عمود

مردم ہو جائے گا

اس لئے $وم = وع$ اور $ع م =$.

جب $۰ = \frac{م}{ع} = \frac{ع}{ع} = ۰$.

جہ $۰ = \frac{وم}{ع} = \frac{ع}{ع} = ۱$.

اور $مس = ۰ = \frac{۰}{۰} = ۰$.

نیز $م = ۰$ = قیمت نسبت $\frac{وم}{ع}$ جب $م$ اور $ع$ ایک دوسرے پر منطبق ہوں

$= \frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}} =$ ایک ایسی مقدار جو لا انتہا بڑی ہے

اس لئے $م = ۰ = \infty$

اسی طرح سے $م = ۰ = \frac{ع}{ع} = \infty$

اور $قط = ۰ = \frac{ع}{وم} = ۱$

۴۱۔ ۰ کا زاویہ

فرض کر دو کہ زاویہ $اوع$ مقدار میں

۰ کے نہایت ہی قریب ہے مگر

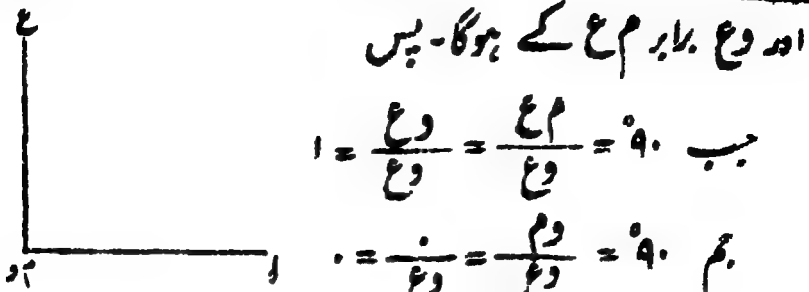
بالکل ۰ نہیں ہے ۔



جب $وع$ فی الحقیقت ایک قائمہ

مرسم کریگا تو اُس وقت نقطہ $م$ نقطہ

و پر منطبق ہوگا یعنی $وم$ فنا ہوگا



اور وع برابر م ع کے ہوگا۔ پس

$$\text{جب } ۹۰^{\circ} = \frac{م}{وع} = \frac{وع}{وع} = ۱$$

$$\text{جم } ۹۰^{\circ} = \frac{وم}{وع} = \frac{وم}{وع} = ۰$$

$$\text{مس } ۹۰^{\circ} = \frac{م}{وم} = \frac{\text{مقدار محدود}}{\text{ہنایت ہی فیصل مقدار}} = \text{لا انتہا بڑا عدد} = \infty$$

$$\text{مم } ۹۰^{\circ} = \frac{وم}{م ع} = \frac{وم}{م ع} = ۰$$

$$\text{قط } ۹۰^{\circ} = \frac{وع}{وم} = \infty \text{ (بعینہ اس عمل سے جو ماس کی صورتیں ہوں)}$$

$$\text{اور قم } ۹۰^{\circ} = \frac{وع}{م ع} = \frac{وع}{م ع} = ۱$$

۴۲۔ اوپر کے زاویوں کی تین مشہور مثلثی نسبتیں یاد رکھنی چاہئیں جو زاوے اکثر استعمال ہوتے ہیں وہ یہ ہیں۔

۰ ۳۰ ۴۵ ۶۰ ۹۰

یاد رہے کہ ان کی جیب بالترتیب مفصلہ ذیل نسبتوں کے جذروں کے برابر ہیں۔

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{\sqrt{3}}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{3}}{۲}, \frac{۱}{۲}$$

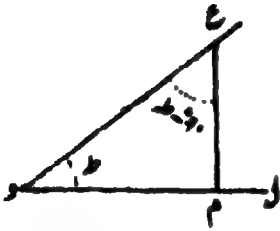
اور ان کی جیب التمام بالترتیب مفصلہ ذیل نسبتوں کے جذروں کے برابر ہیں۔

$$\frac{\sqrt{3}}{۲}, \frac{\sqrt{3}}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{\sqrt{3}}, \frac{۱}{۲}$$

اور ماس زاویہ نسبت جیب ÷ جیب التمام کے برابر ہے۔

۴۳۔ متم زاویے۔ تعریف۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا متم کہتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ کوئی زاویہ ط ہے اس کا متم زاویہ ۹۰۔ ط ہوگا۔

۴۴۔ دو متم زاویوں کی مشتقی نسبتوں کے باہمی ارتباطات دریافت کرو



فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط وا سے شروع ہو کر مقام وع پر پہنچتا ہے اور اپنے گھاؤ سے

زاویہ اوع یعنی زاویہ ط پیدا کرتا ہے۔ خط دائر وع پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور اس سے وا پر عمود عم نکالو۔

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائمہوں کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ زاویہ وم ع قائمہ ہے اس لئے معلوم ہوا کہ زاویہ م وع اور زاویہ وع م کا حاصل جمع ایک قائمہ کے برابر ہے۔ پس یہ دونوں زاوے ایک دوسرے کے متم ہوئے۔

یعنی زاویہ وع م = ۹۰۔ ط

[جس وقت زاویہ وع م زیر بحث ہو تو یاد رہے کہ خط عم "قاعدہ" ہے اور م "عمود"]

پس۔

ب (۹۰-ط) = جب م ع و = $\frac{م}{ع} و$ = جم اوع = جم ط
 جم (۹۰-ط) = جم م ع و = $\frac{ع}{م} و$ = جب اوع = جب ط
 س (۹۰-ط) = مس م ع و = $\frac{م}{ع} م$ = مم اوع = مم ط
 مم (۹۰-ط) = مم م ع و = $\frac{ع}{م} م$ = مس اوع = مس ط
 نم (۹۰-ط) = قم م ع و = $\frac{ع}{م} و$ = قط اوع = قط ط
 ط (۹۰-ط) = قط م ع و = $\frac{ع}{م} م$ = قم اوع = قم ط

ن لئے معلوم ہوا کہ

کسی زاویہ کی جیب = اسکے متمم کی جیب التمام کے

کسی زاویہ کا ماس = اسکے متمم کے ماس التمام کے

کسی زاویہ کا قاطع = اسکے متمم کے قاطع التمام کے

۴۔ طالب علم کو آگے جانے سے پیشتر جدول ذیل سے بخوبی
فہم ہو جانا چاہیے

زاویہ	:	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
جیب	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
ماس	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞
ماس التمام	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	$\frac{۱}{۲}$
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	۲	∞

اگر طالب علم صرف اس حصہ کو بخوبی یاد کر لے جو جلی خط کے اندر ہے تو اس کی مدد سے باقی مثلثی نسبتوں کا حساب آسانی لگ سکیگا کیونکہ

(۱) جیوب ۶۰ اور ۹۰ بالترتیب جیوب التمام ۳۰ اور ۶۰ کے برابر ہیں۔

(۲) جیوب التمام ۶۰ اور ۹۰ جیوب ۳۰ اور ۶۰ کے برابر ہیں اس سے دوسری اور تیسری سطریں معلوم ہوتی ہیں۔

(۳) کسی زاویہ کا ماس جیب کو جیب التمام پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ چوتھی سطر کی کوئی مقدار دوسری سطر کی کسی مقدار کو تیسری سطر کی مطابق مقدار پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے

(۴) چونکہ زاویہ کا ماس التمام اس کے ماس کا مقلوب ہوتا ہے اس لئے پانچویں سطر کی مقداریں چوتھی سطر کی مقداروں کے مقلوبوں کے برابر ہیں

(۵) چونکہ قوس = جیب طہ اس لئے چھٹی سطر دوسری کی مقادیر کو التمام سے حاصل ہوتی ہے۔

(۶) اور چونکہ قوس طہ = جیب طہ اس لئے معلوم ہوا کہ ساتویں سطر تیسری سطر کی مقادیر کو التمام سے حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۷

۱۔ اگر ۱ = ۳۰ تو تصدیق کرو کہ

(۱) جم ۱۲ = جم ۱ - جب ۱ = جم ۲ - جم ۱ - ۱

$$(۲) \text{ جب } ۱۲ = ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم } ۱$$

$$(۳) \text{ جم } ۳ = ۴ \text{ جم } ۱ - ۲ \text{ جم } ۱$$

$$(۴) \text{ جب } ۳ = ۳ \text{ جب } ۱ - ۲ \text{ جب } ۱$$

$$(۵) \text{ مس } ۱۲ = \frac{۲ \text{ مس } ۱}{۱ - \text{مس } ۱}$$

۲۔ اگر ۱ = ۵۴ تو اس کی تصدیق کرو کہ

$$(۱) \text{ جب } ۱۲ = ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم } ۱$$

$$(۲) \text{ جم } ۱۲ = ۱ - ۲ \text{ جب } ۱$$

$$(۳) \text{ مس } ۱۲ = \frac{۲ \text{ مس } ۱}{۱ - \text{مس } ۱}$$

اس کی تصدیق کرو کہ

$$۳ - \text{جب } ۱۲ = ۲ \text{ جب } ۱ + ۴۵ \text{ جب } ۱ + ۹۰ \text{ جب } ۱ = \frac{۳}{۱}$$

$$۴ - \text{مس } ۱۲ = \text{مس } ۱ + \text{مس } ۴۵ + \text{مس } ۹۰ = \frac{۴}{۱}$$

$$۵ - \text{جب } ۳۰ \text{ جم } ۱ + ۹۰ \text{ جم } ۱ = ۱$$

$$۶ - \text{جم } ۵۴ \text{ جم } ۱ - \text{جب } ۴۵ \text{ جب } ۱ = \frac{۱ - ۳۱۲}{۲۱۲}$$

$$۷ - \frac{۴}{۳} \text{ جم } ۳ + ۳ \text{ جب } ۱ - ۹۰ \text{ جم } ۱ - \frac{۳}{۴} \text{ مس } ۳۰ = \frac{۱}{۳}$$

$$۸ - \text{قم } ۵۴ \times \text{قط } ۳۰ \times \text{جب } ۹۰ \times \text{جم } ۹۰ = \frac{۱}{۳}$$

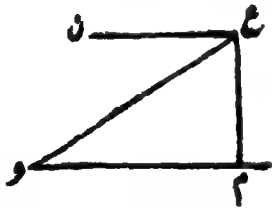
$$۹ - \frac{۴}{۸} \text{ جم } ۵۴ - \text{قط } ۹۰ + \text{جب } ۳۰ = \frac{۱}{۸}$$

باب سوم

بلندیوں اور فاصلوں کے آسان سوالات

۱۴۳۔ علم مثلث کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ اس کی مدد سے اشیاء کی بلندیاں اور مختلف نقاط کے باہمی فاصلے حقیقی طور پر ناپے بغیر دریافت ہو سکیں۔

۱۴۴۔ فرض کرو کہ W اور E دو نقطے ہیں اور C بہ نسبت W



اوپنی سطح پر واقع ہے۔ نقطہ W سے ایک خط افقی WM کھینچو جو عمومی خط WE کو نقطہ M پر قطع کرے۔

اگر مقام W پر کھڑے ہو کر نقطہ E کی سمت میں دیکھیں تو زاویہ WE جو خط نظری WE اور خط افقی WM کے درمیان بنتا ہے۔ نقطہ E کا زاویہ ارتقاع یا زاویہ فراز کہلاتا ہے۔

M کے متوازی EN کھینچو تب نقطہ E میں سے گزرنے والا خط افقی EN ہوگا۔ اب اگر مقام E سے نیچے کی طرف کوئی نقطہ N کی سیدھ میں دیکھیں تو زاویہ EN جو خط نظری EN اور

خط افقی E ن کے درمیان بتا ہے نقطہ W کا زاویہ انخفاض یا زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔

۴۸۔ زاویوں کی علی پیمائش کے لئے دو آلے اکثر استعمال ہوتے ہیں زاویہ بین (تھیڈولائٹ) اور سڈس (سکسٹنٹ) زاویہ بین سے اکثر سطح عمودی میں زاویوں کا اندازہ ہو سکتا ہے اس کی نہایت مادی صورت یہ ہے۔ ایک دور میں لکڑی کی چپٹی تختی پر قائم کر دی جاتی ہے۔ سہارے کے لئے اس تختی کے تین پائے ہوتے ہیں اور ان کو ہموار سطح پر اس طرح رکھتے ہیں کہ تختی اور دور بین دونوں سطح افقی میں ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تختی مقام W پر متوازی الافق ہے اور دور بین کا رخ ابتدا میں سمت W میں ہے۔ اب دور بین کو سطح عمودی میں پھرتے جاؤ جب تک کہ اس کا رخ عین نقطہ E کی سیدھ میں نہ ہو جائے۔ جب ایسا ہو تو ایک درجہ دار پیمانہ سے ہیکو دور بین کے گھماؤ کے زاویہ کی مقدار معلوم ہو جائیگی، یعنی ہیکو زاویہ ارتفاع W سے معلوم ہو جائے گا۔

اسی طرح سے اگر آلہ مقام E پر ہو تو زاویہ N E و W میں دور بین سمت افقی سے نیچے کی طرف نقطہ W کے عادی ہوئیے لئے پھرے گی زاویہ انخفاض N E و W ہوگا۔

اس آلہ کی مدد سے ان زاویوں کی پیمائش بھی ممکن ہے جو سطح افقی میں واقع ہوں۔

۴۹۔ سڈس (سکسٹنٹ) سے ایسے زاویوں کی پیمائش ہو سکتی ہے جو کسی دو نقاط D اور E کے خط وصل کے عادی تیسرے

نقطہ ف پر نہیں۔ اکثر یہ آلہ جازوں پر استعمال ہوتا ہے اس کی بناوٹ اور اس کا استعمال ذرا پیچیدہ ہے۔ لہذا ہم اس جگہ اس کا ذکر نہیں کرتے۔

۵۰۔ اب ہم فاصلوں اور بلندیوں کی چند آسان مثالیں حل کریں گے۔

مثال ۱۔ سطح سموا پر ایک علم قائم ہے اس کے پائین سے ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر ایک مقام سے اسکی چوٹی کا زاویہ ارتقاع ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے، علم کی بلندی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ م ع (شکل دفعہ ۷۴) علم ہے اور و ایسا نقطہ ہے جس سے زاویہ ارتقاع دیکھا گیا ہے۔

تب و م = ۱۵۰ فٹ اور زاویہ م و ع = ۳۰°
اب چونکہ م و زاویہ قائمہ ہے۔ اس لئے

$$\frac{م}{و م} = \frac{م}{م و ع} = \frac{م}{م س} = \frac{۱}{\sin ۳۰} \text{ (دفعہ ۳۸)}$$

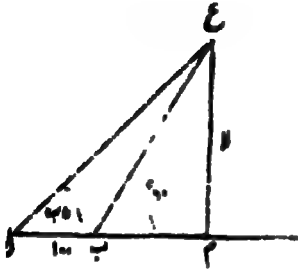
$$\therefore م = \frac{و م}{\sin ۳۰} = \frac{۱۵۰}{\frac{۱}{۲}} = ۳۰۰$$

اور استخراج جذر کے ۳۰۰ = ۱۷۳۲۰۵.....

اس لئے م ع = ۱۷۳۲۰۵..... × ۵۰ = ۸۶۶۰۲۵..... فٹ

مثال ۲۔ سطح افقی پر ایک گرج کا مینار ہے اور ایک شخص اس کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے۔ سطح کے کسی مقام سے

اس نے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۴° مشاہدہ کیا اور ۱۰۰ فٹ برج کی سمت میں جانے پر زاویہ ارتفاع ۶۰° دیکھا۔ برج کی بلندی اور پائین برج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ مینار کی چوٹی ع ہے

اور ل اور ب دو مقامات ہیں

جہاں سے زاویوں کے ارتفاع

مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ل ب محدود ہے۔

عمود ع م نکالو اور فرض کرو کہ م ع = ل

ہیں معلوم ہے ل ب = ۱۰۰ فٹ

$$\angle م ل ع = ۵۴$$

$$\text{اور } \angle م ب ع = ۶۰$$

$$\text{اس سے } \frac{ل}{ل ب} = \frac{م ب}{۱۰۰}$$

$$\text{اور } \frac{ل ب}{ل} = \frac{۱۰۰}{م ب} = \frac{۶۰}{۵۴}$$

$$\text{اس لئے } ل م = ل \text{ اور } ب م = \frac{ل}{\frac{۶۰}{۵۴}}$$

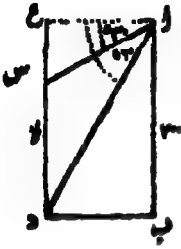
$$\therefore ۱۰۰ = ل م - ب م = ل - \frac{ل}{\frac{۶۰}{۵۴}} = ل \left(۱ - \frac{۵۴}{۶۰} \right)$$

$$\therefore ل = \frac{(۶۰ - ۵۴) ۱۰۰}{۶۰ - ۵۴} = \frac{(۶۰ - ۵۴) ۱۰۰}{۶ - ۵} = \frac{(۶۰ - ۵۴) ۱۰۰}{۱} = ۱۰۰$$

$$۱۰۰ = (۶۰ - ۵۴) ۱۰۰ = (۶۰ - ۵۴) ۱۰۰ = ۱۰۰$$

نیز ل م = ل، اس سے معلوم ہوا کہ بہر دو مطلوبہ فاصلے ۱۰۰ فٹ ہیں

مثال ۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے ایک برج کے نقطہ اسٹل اور راس کے انخفاضی زاوے ۹۰° اور ۳۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، برج کی بلندی دریافت کرو



فرض کرو کہ س د برج ہے۔
و نقطہ نگاہ اور ہا پہاڑ کی بلندی۔
خط افقی اے کھینچو تب زاویہ ع اے س = ۳۰°
اور زاویہ ع اے د = ۹۰°

فرض کرو کہ برج کی بلندی لا فٹ ہے، دس کو اتنا خارج کرو کہ وہ اے کو نقطہ ع پر ملے یعنی س ع = اے ب = لا = ۲۰۰۔ لا اب چونکہ اے د ب = اے ب = ۲۰۰ (اقلیدس مش ۴۹)

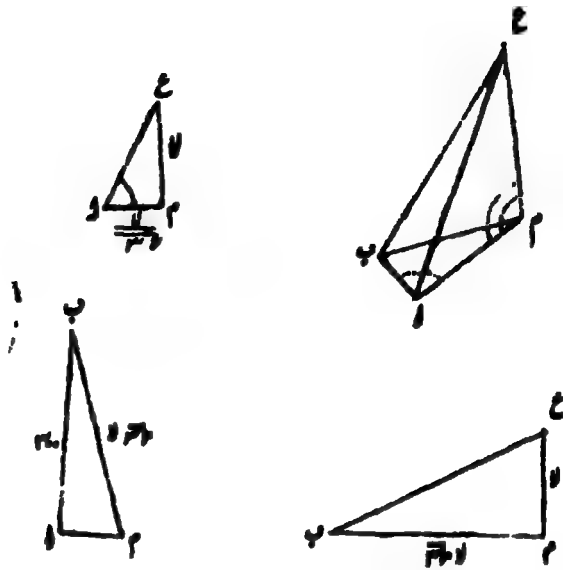
$$\therefore د ب = اے ب = ۲۰۰ \text{ مم} \quad اے ب = ۲۰۰ \text{ مم} \quad \frac{۲۰۰}{۳۲}$$

$$\text{نیز } \frac{۲۰۰}{د ب} = \frac{س ع}{اے ب} = \frac{س}{۳۲} = ۳۰$$

$$\text{اس لئے } ۲۰۰ - لا = \frac{د ب}{۳۲} = \frac{۲۰۰}{۳۲}$$

$$\text{پس } لا = ۲۰۰ - \frac{۲۰۰}{۳۲} = \frac{۱۳۳}{۳۲}$$

مثال ۴۔ ایک برج کی جانب جنوب میں کسی مقام سے ایک شخص نے برج کا زاویہ ارتفاع ۹۰° دیکھا اس کے بعد ایک سطح افقی پر وہ ۳۰ فٹ مغرب کی طرف گیا اور وہاں زاویہ ارتفاع ۳۰° پایا، برج کی بلندی اور برج سے اُس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ع برج کی چوٹی ہے اور ع م بلندی۔ نقطہ اُ برج کے جنوب میں اور ب نقطہ اُ کی جانب مغرب میں واقع ہے۔
 ڈائے ع م اُ، ع م ب، م اُ ب سب قائے ہیں۔ چونکہ مثلثات ع اُ م، ع ب م، اُ ب م سب مختلف سطحوں میں واقع ہیں اسلئے سہولت کی خاطر ان کو دوسری، تیسری، چوتھی شکلوں میں جدا جدا نمونہ ایک مناسب پیمانہ واحد کے دکھایا گیا ہے۔

ہیں معلوم ہے کہ اُ ب = ۱۰۰ فٹ اور زاویہ ع اُ م = ۶۰°

اور زاویہ ع ب م = ۳۰°

مقابل کے کنارے پر ایک درخت کے عمودی زاویہ ۶۰ مشاہدہ کیا
کنارے سے ۳۵ فٹ پیچھے بیٹھے پر وہی زاویہ ۳۰ دیکھا ، درخت کی
اونچائی اور دریا کی چوڑائی دریافت کرو ۔

۲۔ کسی خاص مقام سے ایک برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا تو
اُس کا ماس التمام $\frac{1}{2}$ تھا ، برج کی سیدھ میں ۳۲ فٹ جانے پر
پھر وہی زاویہ دیکھا تو اُس کا ماس التمام $\frac{1}{2}$ تھا ۔ برج کی بلندی
دریافت کرو ۔

۳۔ مقام ۱ سے ایک برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا گیا اُس وقت
اس کا ماس $\frac{1}{2}$ تھا ۔ برج کی طرف ۲۴۰ فٹ جانے پر زاویہ ارتفاع
دوبارہ دیکھا گیا تو اُس کا ماس $\frac{1}{2}$ تھا ۔ برج کی بلندی دریافت کرو ۔
۴۔ ایک ایسے دودکش کی بلندی دریافت کرو جبکہ اس کی
جڑ کی سیدھ میں ۱۰۰ فٹ ایک خط افقی پر جانے سے اس کی چوٹی
کا زاویہ ارتفاع ۳۰ سے ۵۴ ہو جائے ۔

۵۔ ایک پہاڑ سطح سمندر سے ۲۰۰ فٹ اونچا ہے ، اس کی
چوٹی سے کسی شخص نے دو جہازوں کے انخفضی زاوئے بالترتیب ۵۴
اور ۳۶ مشاہدہ کئے اگر جہازوں کو ملانے والا خط پہاڑ کے پائین میں سے
گزرے تو جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو ۔

۶۔ ایک چٹان کی چوٹی سے کسی شخص نے سمندر میں دو لنگروں
کے انخفضی زاوئے ۳۹ اور ۲۶ مشاہدہ کئے ۔ اگر لنگروں کا
درمیانی فاصلہ ۳۰۰ گز ہو اور اُن کو ملانے والا خط چٹان کی جڑ
میں سے گزرے تو چٹان کی بلندی اور سب سے نزدیک لنگر کا فاصلہ

چٹان کے پائین سے دریافت کرو۔ معلوم ہے۔

$$\text{مم } ۲۶ = ۲۱.۵۰۳ \text{ اور مم } ۳۹ = ۱۲.۳۴۹$$

۷۔ ایک درخت کے اوپر کا حصہ آندھی سے ٹوٹکر سطح زمیں سے زاویہ ۳۰ بناتا ہے اور جڑ سے فاصلہ اُس نقطے کا جہاں درخت کی چوٹی زمین سے مس کرتی ہے ۵۰ فٹ ہے درخت کی بلندی دریافت کرو۔

۸۔ دو برجوں کے درمیان افقی فاصلہ ۶۰ فٹ ہے اور دوسرے برج کی چوٹی سے جو ۱۵۰ فٹ بلند ہے پہلے برج کی چوٹی کا زاویہ انقباض ۳۰ مشاہدہ کیا گیا ہے پہلے برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک نامکمل برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع (۵۴) ایک ایسے مقام سے مشاہدہ کیا گیا ہے جو پائین برج سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلے پر ہے معلوم کرو کہ مینار اور گنٹا اونچا کیا جائے کہ اس کا زاویہ ارتفاع اُسی مقام سے ۶۰ ہو۔

۱۰۔ ایک شُرک ۱۰۰ فٹ چوڑی ہے اور اس کے دونوں طرف دو ستون ہیں جن کی اونچائی ایک ہی ہے، ستونوں کے درمیان شُرک کے کسی نقطہ سے ان کی چوٹیوں کے ارتفاع ۶۰ اور ۳۰ مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ستونوں کی بلندی اور نقطہ کا مقام دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک برج کے ماس کا زاویہ ارتفاع ایک مقام سے ۶۰ دیکھا گیا۔ اُس سے ۴۰ فٹ اونچے مقام پر ارتفاع ۵۴ تھا، برج کی بلندی اور مشاہدہ کرنے والے مقامات سے اسکا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۲۔ دامنِ کدہ میں کسی مقام سے ایک پہاڑ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۴

دکھائی دیا، جب ایک سطح مائل پر جو افق سے 30° تھا، زاویہ بنائی تھی ایک میل اوپر چڑھے تو وہی زاویہ ارتفاع 40° تھا۔ پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔
۳۱۔ اگر ایک لکڑی کا سایہ اُس کی بلندی کا $\frac{1}{2}$ گنا ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو۔

۳۲۔ سطح ہموار پر ایک برج ہے۔ جب سورج کا ارتفاع 30° ہو تو برج کے سایہ کا طول بہ نسبت اُس صورت کے جبکہ ارتفاع 45° ہو 40 فٹ زیادہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ برج کی بلندی $30(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ فٹ ہے۔

۳۵۔ تین مقامات A, B, C سمندر کے سیدھے کنارے پر اس طرح واقع ہیں کہ $AB = BC = 2$ میل، ایک جہاز کنارے کی عمودی سمت میں مقام B کی طرف آ رہا ہے اور راستہ کے کسی مقام پر طول AC کے محاذی جہاز پر زاویہ 40° بنتا ہے اس کے بعد جہاز دس منٹ کے لئے اُس سمت میں اُسی رفتار سے جاتا ہے اور پھر AC کے محاذی زاویہ 30° بنتا ہے۔ معلوم کرو کہ جہاز کس رفتار سے جا رہا ہے۔

۳۶۔ دو علم سطح ہموار پر قائم ہیں، علموں کے درمیان اور ان کے مانے والے خط پر A اور B دو نقطے ہیں اگر A سے علموں کے ارتفاعی زاوئے دیکھے جائیں تو وہ 30° اور 40° ہیں اور اگر B سے دیکھے جائیں تو 40° اور 50° ہیں اگر B کا طول 30 فٹ ہو تو علموں کی بلندیاں اور ان کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۳۷۔ فرض کرو کہ سطح افقی پر ایک مینار ہے، اس اُسکا سر اور پائے دو مقامات A اور B اُسی سطح میں لئے گئے ہیں، $AB = 32$ فٹ

اور زاویہ پ ا ب = ۹۰ نیز یہ معلوم ہے کہ مم میں ا ب = $\frac{1}{2}$ اور

مم میں ب پ = $\frac{1}{2}$ مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸۔ سطح سموار پر ایک مربع برج ہے۔ سطح کے کسی مقام سے ب کے تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہو کر کونوں کے تین ارتفاعی زاویے

۴۵°، ۶۰°، ۴۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو ہر ایک ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)$ کو ۴۵ سے ہے۔

۱۹۔ ایک روشنی کے مینار کا رخ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی کی شعاعیں قطاع دائرہ کی شکل میں اسات شمال مشرق اور شمال مغرب کے مابین حصہ میں قسع ہوتی ہیں۔ ایک جہاز مغرب کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک مسافر کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اُس وقت دکھائی دیں جبکہ جہاز روشنی گھر سے ۵ میل کے فاصلے پر تھا اور وہ شعاعیں ۳۰° منٹ تک دکھائی دیتی رہی جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں ایک شخص نے ایک کنارے لاکھا کے کسی مقام لا پر کھڑے ہو کر دیکھا کہ مقام لا اور مقابل کے کنارے پر کے مقام سے کو ملانے والا خط مستقیم لاکھا سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۲۰۰ گز مقام ہما تک چلا اور اس نے دیکھا کہ زاویہ سے ہما لا = ۶۰° دریا کا عرض دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جا رہا تھا اُس نے اپنے ٹھیک مشرق کی طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا غبارہ کا ارتفاع اس وقت ۶۰° تھا جب وہ ۲۰۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اُس کی سمت راست میں تھا اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثنا میں یکساں رہا ہو تو اُس کی بلندی دریافت کرو۔

باب چہارم

علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال

۵۱۔ ثبوت اور منفی زاویے۔ دفعہ ۸ میں جب ہم نے ایسے زاویوں کا ذکر کیا جن کی مقدار پر کم از قائلہ ہونے کی قید نہ تھی تو ہم نے یہ فرض کر لیا تھا کہ خط دائرہ ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کا منہ اوپر کی طرف ہو، اس سمت کو ہم مقابل سمت ساعت کہیں گے اور آئندہ جب کوئی خط دائرہ اس سمت میں حرکت کرے گا تو ہم اس کو یوں بیان کریں گے کہ یہ ثبوت سمت میں چکر لگاتا ہے یا ثبوت زاویہ مرسم کرتا ہے۔

جب خط دائرہ سمت مذکورہ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے اور منفی زاویہ مرسم کرتا ہے۔ اس منفی سمت کو موافق سمت ساعت بھی کہتے ہیں۔

۵۲۔ فرض کرو کہ خط دائرہ مقام ۱ سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام ۲ پر پہنچتا ہے جو ۱ اور ۲ کے

اور زاویہ پ ا ب = ۹۰ نیز یہ معلوم ہے کہ مم س ا پ = $\frac{1}{2}$ اور
مم س ب پ = $\frac{1}{2}$ مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸۔ سطح بہوار پر ایک مربع برج ہے۔ سطح کے کسی مقام سے برج کے سر کے
تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہو کر کونوں کے تین ارتفاعی زاوے
۴۵°، ۴۰°، ۵۴° مشاہدہ کئے گئے ہیں ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو ہر ایک
ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)$ کو ۴۵ سے ہے۔

۱۹۔ ایک روشنی کے مینار کا رخ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی
کی شعاعیں قطع دائرہ کی شکل میں اسات شمال مشرق اور شمال مغرب کے دویانی
حصہ میں متبع ہوتی ہیں۔ ایک جہاز مغرب کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک مسافر
کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اُس وقت دکھائی دیں جبکہ جہاز روشنی گھر
سے ۵ میل کے فاصلے پر تھا اور وہ شعاعیں ۳۰° ۴۵' منٹ تک دکھائی دیتی تھیں
جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں ایک شخص نے ایک
کنارے لاکھا سے کسی مقام لا پر کھڑے ہو کر دیکھا کہ مقام لا اور مقابل
کے کنارے پر کے مقام سے کو ملانے والا خط مستقیم لاکھا سے زاویہ ۳۰°
بناتا ہے اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۲۰۰ گز مقام صا تک چلا اور
اس نے دیکھا کہ زاویہ سے صا لا = ۴۰° دریا کا عرض دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جا رہا تھا اُس نے اپنے ٹھیک مشرق کی
طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا غبارہ کا ارتفاع اس وقت
۴۰° تھا جب وہ ۲۰۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اُس کی سمت راس میں تھا
اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثنا میں یکساں رہا ہو تو اُس کی بلندی دریافت کرو۔

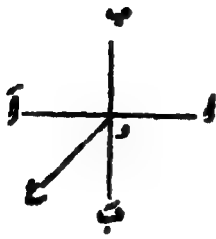
باب چہارم

علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال

۵۱۔ مثبت اور منفی زاویے۔ دفعہ ۸ میں جب ہم نے ایسے زاویوں کا ذکر کیا جن کی مقدار پر کم از قائلہ ہونے کی قید نہ تھی تو ہم نے یہ فرض کر لیا تھا کہ خط دائرہ ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کاؤچ اوپر کی طرف ہو، اس سمت کو ہم مقابل سمت ساعت کہیں گے اور آئندہ جب کوئی خط دائرہ اس سمت میں حرکت کرے گا تو ہم اس کو یوں بیان کریں گے کہ یہ مثبت سمت میں چکر لگاتا ہے یا مثبت زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

جب خط دائرہ سمت مذکورہ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے اور منفی زاویہ مرتسم کرتا ہے۔ اس منفی سمت کو موافق سمت ساعت بھی کہتے ہیں۔

۵۲۔ فرض کرو کہ خط دائرہ مقام ۱ و ۲ سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام ۳ پر پہنچتا ہے جو ۱ و ۲ اور ۳ کے



در بیان واقع ہے اور زاویہ \angle و ب
کی تنصیف کرتا ہے اب اگر یہ
مثبت سمت میں گھوم کر اس مقام
پر پہنچا ہو تو اس نے ایک مثبت
زاویہ 225° مرقم کیا ہے لیکن
اگر اس کی گردش کی سمت منفی

تھی تو اس نے ایک منفی زاویہ -135° اپنی حرکت سے پیدا کیا ہے۔
فرض کرو کہ ہمیں صرف یہی معلوم ہے کہ خط دائرہ مقام مذکورہ
پر ہے۔ اب ممکن ہے کہ اس نے ایک 'دو' تین پورے
چکر لگانے کے بعد ایک مثبت زاویہ 225° مرقم کیا ہو یا ایک
دو 'تین' پورے چکر منفی سمت میں لگانے کے بعد ایک
منفی زاویہ -135° اپنی گردش سے پیدا کیا ہو۔

صورت اول میں یہ زاویہ مرقم 225° ہوگا یا $225^\circ + 360^\circ$ ،
یا $225^\circ + 360^\circ \times 2$ یا $225^\circ + 360^\circ \times 3$
یعنی 225° یا 585° یا 945° یا 1305°
صورت دوم میں زاویہ مرقم -135° ہوگا یا $-135^\circ - 360^\circ$
یا $-135^\circ - 360^\circ \times 2$ یا $-135^\circ - 360^\circ \times 3$
یعنی -135° یا -795° یا -1215°
۵۳۔ مثبت اور منفی خطوط۔ اس سے پیشتر کہ ہم زاویہ قائمہ

سے بڑے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریفیں لکھیں یہ بیان کرنا ضروری
ہوگا کہ مختلف سمتوں میں ناپے ہوئے خطوط کی عددی قیمتوں کے

کی طرف "کا مطلب وہی ہے جو اے سے ۱۱ میل مغرب کی طرف" کا ہے
اس قسم کی دلائل سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ایک سمت میں ایک فاصلہ اے سے
تعبیر کیا جائے تو اس کی مخالف سمت میں اس کے مساوی فاصلہ - اے سے تعبیر ہوگا۔

و — — — — — و — — — — — و

اگر اے ایک فاصلہ و اے ناپا جائے اور و = ص تو - ص سے فاصلہ و اے
تعبیر ہوگا جہاں و ایک ایسا نقطہ و محدودہ پر ہے کہ و = ۱۹
۵۴ - ترتیب حروف کو ملحوظ رکھنے کی خاص ضرورت
ایک ہندسی خط کی سمت کو ان حروف کی ترتیب سے تعبیر کرتے ہیں
جو اے نامزد کرنے میں استعمال کئے جائیں مثلاً و ب سے ایک
ایسا خط تعبیر ہوتا ہے جو و سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہو
لیکن اگر یہی خط ب سے و کی سمت میں ناپا گیا ہو تو ہم اسکو
ب و کہیں گے نہ کہ و ب۔

اگر و اور ب دو مقامات ایک دوسرے سے ۱۲ میل کے فاصلہ پر ہوں

ب — — — — — و

تو و ب سے وہ فاصلہ تعبیر ہوگا جو ایک شخص نے و سے ب تک
چلنے میں طے کیا ہے اور ب و سے وہ فاصلہ جو ب سے و تک
چلنے میں طے ہوا ہے۔ اگر پہلے فاصلے کو ۱۲+ سے تعبیر کریں تو دوسرے
کو - ۱۲ سے تعبیر کریں گے اگر کوئی شخص و سے ب تک چلے اور
پھر واپس و پر آئے تو اس کا کل فاصلہ طے کردہ و سے صفر ہوگا

۱۱۔ اس بیان کا طریق کتابت یہ ہے۔

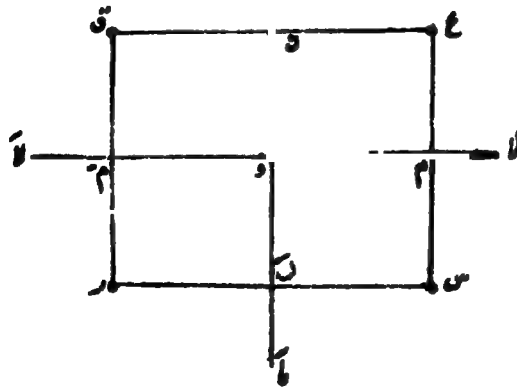
$$۱۱ب + ۱ = ۱۲ = (۱۲ -) = ۰$$

۵۵۔ جب ایک خط دائر و روع مقام ولا سے شروع ہو کر اپنی گردش سے مختلف زاوے پیدا کرے تو ان زاویوں کی شش نسبتوں کی تعریفات میں قوانین ذیل کا خیال رکھنا چاہئے۔

جو خطوط ولا پر یا اس کے متوازی تاپے جائیں ان کو ہمیشہ مثبت خیال کرنا چاہئے اگر وہ سمت ولا میں کھینچے جائیں۔ اور منفی اگر سمت مخالف ولا میں کھینچے جائیں۔

اب فرض کر دو کہ ولا کو وما زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے تو وہ سب خطوط جو ولا پر عمود ہوں مثبت کہلائیں گے اگر وہ سمت وما میں کھینچے گئے ہوں اور منفی اگر وہ سمت مخالف وما میں کھینچے گئے ہوں۔

شکل کھینچنے میں یاد رہے کہ ولا کا رخ دائیں طرف متوازی الافق ہے اور وما سمت راس میں اوپر کی طرف ہے۔



نقطہ سے دو دو پر عمود عم م نکالو۔
 اوپر کی شکل میں چکر لگانے والے خط کے چار مقامات دکھائے گئے ہیں
 ہر ایک رجب میں ایک مقام ہے اور امتیاز کی خاطر اعداد مغربہ ۱، ۲، ۳، ۴
 حرف ع سے منسلک کروئے گئے ہیں
 پس جب زاویوں کی مقدار پر کم از قائمہ ہونے کی قید نہ ہو
 تو مثلثی نسبتوں کی تعریفات کسی مقدار کے زاویوں کے لئے مفصلہ ذیل
 ہوں گی اور یاد رہے کہ زاویہ حادہ کی صورت میں جو تعریفات
 جنے مثلثی نسبتوں کی دفعہ ۲۵ میں دی ہیں وہ بالکل وہی ہیں
 جو ہم اب لکھتے ہیں۔

مجموع	کو زاویہ	اوع	کی جیب	کہتے ہیں
مجموع	”	”	”	جیب التمام
مجموع	”	”	”	کاماس
مجموع	”	”	”	ماس التمام
مجموع	”	”	”	قاطع
مجموع	”	”	”	قاطع التمام

مقادیر ۱۔ جم اوع اور ۱۔ جبل اوع کو زاویہ اوع کا بائیں
 سہم (یا جیب معکوس) اور سہم التمام کہتے ہیں۔

۵۷۔ بیض اُس محل سے جو دغہ ۲۹ میں ہوا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ زاویہ ا و ع (= ط) کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{جب } ط + \text{جم} = ۱$$

$$\frac{\text{جب } ط}{\text{جم}} = \text{مس } ط$$

$$\text{قط } ط = ۱ + \text{مس } ط$$

$$\text{قم } ط = ۱ + \text{مم } ط$$

اور

۵۸۔ مثلث نسبتوں کی علامات

ربع اول۔ فرض کرو کہ خط دائر ربع اول میں ہے جیسے

و ع ، چکر لگانے والے خط کو ہمیشہ مثبت خیال کرو۔

اس صورت میں و م اور م ع ، دونوں مثبت ہیں جس سے معلوم ہوا کہ مثلث نسبتیں سب مثبت ہیں۔

ربع دوم۔ فرض کرو کہ خط دائر و ع ، ربع دوم میں ہے اس صورت میں م ع ، مثبت ہے اور و م ، منفی۔

چونکہ جیب زاویہ دو مثبت مقادیر کی باہمی نسبت کے برابر ہے اس لئے وہ مثبت ہے ، چونکہ جیب تمام ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ منفی ہے اور نسب نما مثبت ، اس لئے وہ منفی ہے۔

ماس زاویہ ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ

مثبت ہے اور نسبت نامنفی اس لئے وہ منفی ہے ۔

ماس التمام منفی ہے

قاطع التمام مثبت ہے

قاطع زاویہ منفی ہے

ربیع سوم — فرض کرو کہ خط دائر ربیع سوم میں ہے جیسے **وع**

اس صورت میں **م** ربع اور **وم** دونوں منفی ہیں ۔

جیب زاویہ منفی ہے

جیب التمام منفی ہے

ماس زاویہ مثبت ہے

ماس التمام مثبت ہے

قاطع التمام منفی ہے

قاطع زاویہ منفی ہے

ربیع چہارم — فرض کرو کہ چکر لگانے والا خط **وع** ربع چہارم

میں ہے **تب** **م** ربع منفی ہو گا اور **وم** مثبت ، **س** لئے

جیب زاویہ منفی ہے

جیب التمام مثبت ہے

ماس زاویہ منفی ہے

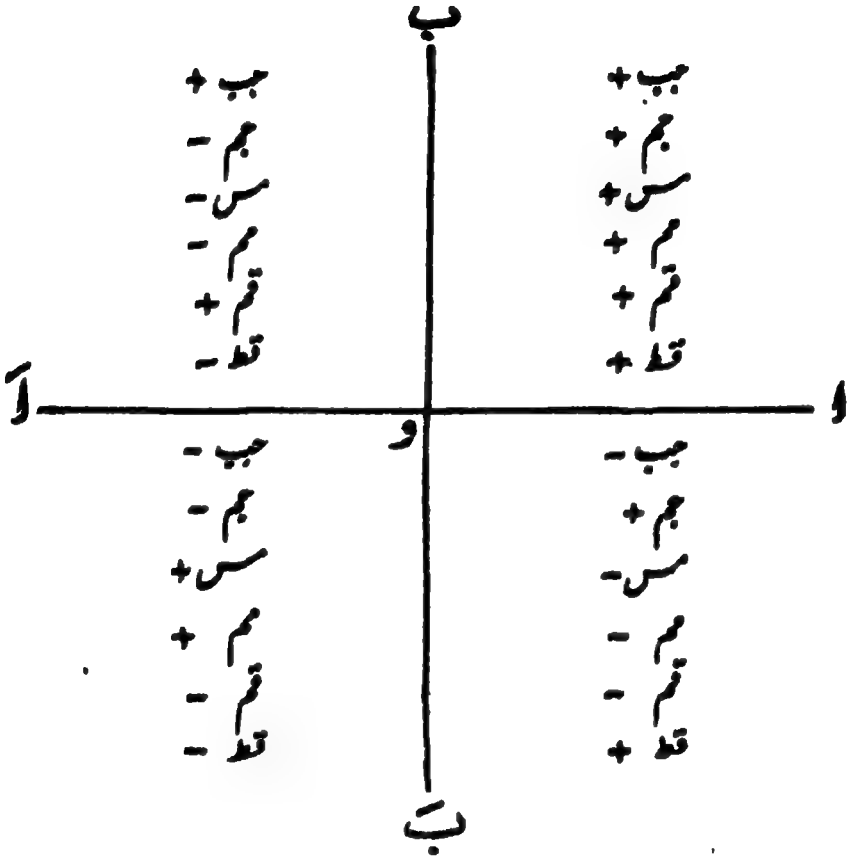
ماس التمام منفی ہے

قاطع التمام منفی ہے

قاطع زاویہ مثبت ہے

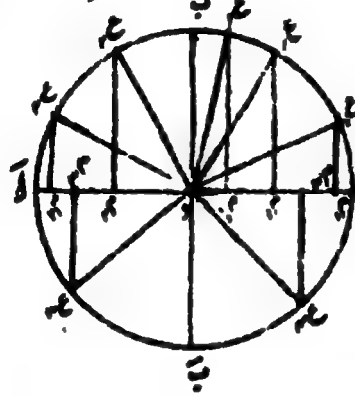
جدول ذیل میں مثلثی نسبتوں کی علامات اُن تمام صورتوں میں

سندرج ہیں جب خط دائر کسی ایک ریلج میں واقع ہو اور کسی ناویہ
بجوزہ کا ایک طرف سے احاطہ کرے۔



۵۹ - جب زاویہ : سے ۹۰° تک بڑھے تو اس کی
ہر ایک شلتی نسبت کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔
فرض کرو کہ چکر لگانے والے خط وضع کا مستقل طول λ ہے،
جب λ پر منطبق ہوتا ہے تو طول ω برابر λ کے ہوتا ہے

یہ وجہ پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ م نقطہ و پر منطبق ہوتا
ہے۔ و م صفر ہوتا ہے، نیز جب خط دائرہ و سے وجہ
مت کرتا ہے تو طول و م کی قیمت ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے



ط دائرہ دوسرے ربع میں
ہے و ایک حرکت
تو طول و م منفی ہوتا ہے
۱ صفر سے ایک بڑھتا ہے
روئے الجبرا صفر سے ۱

(۱ ہے)

ربع میں طول و م از روئے الجبرا ۱ سے صفر تک بڑھتا
چوتھے ربع میں طول و م صفر سے ایک بڑھتا ہے۔
۵ میں طول م ۱ صفر سے ایک بڑھتا ہے، م ۱ سے
م ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے، ربع سوم میں م ۱ سے
۱ الجبرا صفر سے ۱ تک گھٹتا ہے اور ربع چہارم میں م ۱ سے
۱ الجبرا ۱ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

جیب - ربع اول میں جب زاویہ ۰ سے ۹۰ تک

ہے تو اس کی جیب $(\frac{1}{2} \text{ سے } 1)$ متواتر $\frac{1}{2}$ سے ۱ تک
صفر سے ایک بڑھتی ہے۔

۱ ربع میں جب زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے تو
جیب $\frac{1}{2}$ سے ۱ تک یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع سوم میں جب زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی صفر سے ۱ تک گھٹتی ہے۔

ربع چہارم میں جب زاویہ ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

۹۱۔ جیب التمام۔ ربع اول میں جیب التمام $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے اور $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع دوم میں یہ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ یعنی صفر سے ۱ تک گھٹتی ہے
ربع سوم میں یہ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی ۱ سے صفر تک بڑھتی ہے
ربع چہارم میں یہ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی صفر سے ۱ تک بڑھتی ہے

۹۲۔ محاسن ربع اول میں م، ا، ع، متواتر صفر سے ۱ تک بڑھتا ہے اور دوم متواتر ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے پس نسبت $\frac{م}{ا} = \frac{ع}{۱}$ متواتر بڑھتی ہے (کیونکہ اس کا شمار کنندہ متواتر بڑھتا ہے اور کسب نامہ متواتر گھٹتا ہے)

جب $\frac{و}{ا}$ پر $\frac{ع}{ا}$ منطبق ہوتا ہے تو محاسن صفر ہوتا ہے اور جب خط دائر ایک ایسے زاویے میں گھوم چکta ہے جو قائمہ سے ذرا کم ہو یعنی جب $\frac{و}{ع}$ تقریباً $\frac{و}{ب}$ پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت م، ا، ع، تقریباً ۱ کے برابر ہوتا ہے اور طول و، نہایت چھوٹا ہوتا ہے، اس وقت نسبت $\frac{م}{و} = \frac{ا}{ب}$ کی قیمت نہایت زیادہ

ہوتی ہے اور وہ جتنا قریب وب کے آتا جاتا ہے اُتنا ہی اس نسبت کی مقدار بڑھتی جاتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ خط دائر کو وب کے کافی قریب لانے سے ہم ماس زاویہ کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں، اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ جب زاویہ 90° ہوتا ہے تو اس کا ماس غیر متناہی ہوتا ہے۔

مقدار غیر متناہی کو تعبیر کرنے کے لئے ∞ استعمال کرتے ہیں۔ پس ربع اول میں ماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

دوسرے ربع میں جب خط دائر ایک ایسا زاویہ منقسم کرتا ہے جو قائمہ سے ذرا زیادہ ہو تو اس وقت مہم تقریباً 90° کے برابر ہوتا ہے اور دوم منفی اور نہایت چھوٹا ہوتا ہے یعنی اُس وقت ماس زاویہ ایک منفی، غیر متناہی مقدار کے برابر ہوتا ہے۔

نیز جب خط دائر وب سے 90° تک حرکت کرتا ہے تو مہم مقدار میں اسے صفر تک گھٹتا ہے اور دوم منفی ہوتا ہے اور صفر سے 90° تک گھٹتا ہے پس جب چکر لگانے والا خط 90° پر منطبق ہوتا ہے تو ماس زاویہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔

لہذا ثابت ہوا کہ ربع دوم میں ماس ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

تیسرے ربع میں مہم اور دوم دونوں منفی ہوتے ہیں اس لئے ان کی نسبت مثبت ہوتی ہے، نیز جب خط دائر وب پر منطبق ہوتا ہے تو ماس غیر متناہی ہوتا ہے۔ اس لئے ثابت ہوا کہ ربع سوم میں ماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

چوتھے ربع میں مہ عہ منفی ہوتا ہے اور و مہ مثبت اور ان کی نسبت منفی ہوتی ہے، نیز جب خط دائر مقام وب پر سے ہو کر گذرتا ہے تو ماس زاویہ کی قیمت $\infty + \infty$ سے ∞ تک بدلتی ہے (جیسا اوپر مجھے مقام وب پر دیکھا) پس معلوم ہوا کہ ربع چہارم میں ماس ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۴۳۔ ماس التمام۔ جب خط دائر وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت مہ عہ نہایت چھوٹا اور و مہ تقریباً لا کے برابر ہوتا ہے پس ماس التمام (یعنی نسبت $\frac{و}{م}$) ابتدا میں ہی غیر متناہی ہوتا ہے اور جب خط دائر وا سے وب تک گردش کرتا ہے تو مہ عہ مقدار

میں صفر سے لا تک بڑھتا ہے اور و م کی قیمت لا سے صفر تک گھٹتی ہے، لہذا ربع اول میں ماس التمام ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے۔ دوسرے ربع میں مہ عہ مثبت ہوتا ہے اور و مہ منفی، پس معلوم ہوا کہ ماس التمام صفر سے لا تک یعنی صفر سے ∞ تک گھٹتا ہے۔

تیسرے ربع میں ماس التمام مثبت ہوتا ہے اور ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے (کیونکہ جب خط دائر مقام وا پر سے ہو کر گذرتا ہے تو ماس التمام کی قیمت ∞ سے $\infty + \infty$ تک بدلتی ہے) ربع چہارم میں ماس التمام منفی ہوتا ہے اور صفر سے ∞ تک گھٹتا ہے۔

۴۴۔ قاطع۔ جب خط دائر وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت

وم کی قیمت ۱ ہوتی ہے اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت بھی ایک ہوتی ہے۔

جب خط دائرہ والے وب تک گردش کرتا ہے تو وم مقدار میں ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے اور جب چکر لگانے والا خط وب پر منطبق ہوتا ہے تو قاطع زاویہ کی قیمت ۱ یعنی ∞ ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ربع اول میں قاطع زاویہ ۱ سے ∞ تک بڑھتا ہے

ربع دوم میں وم منفی ہوتا ہے اور مقدار میں صفر سے ۱ تک گھٹتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع زاویہ ∞ سے ۱

تک بڑھتا ہے (کیونکہ جب خط دائرہ مقام وب پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مقدار وم کی علامت بدل جاتی ہے اور اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت میں تغیر $+$ ∞ سے ∞ تک ہوتا ہے)

ربع سوم میں وم ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور ۱ سے صفر تک بڑھتا ہے اس لئے قاطع زاویہ ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے۔

ربع چارم میں وم ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور صفر سے ۱ تک بڑھتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع زاویہ ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے۔

۶۵۔ قاطع التمام۔ اس کے تغیرات کی تحقیق بھی اسی طرح ہو سکتی ہے جیسے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی ہوئی۔

ربع اول میں قاطع التمام ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے

ربع دوم میں $+$ ۱ سے ∞ تک بڑھتا ہے

ربع سوم میں $-$ ∞ سے ۱ تک بڑھتا ہے

ربیع چہارم میں یہ - ۱ - سے - ∞ تک گھٹتا ہے
۴۴ - اوپر کے سب نتائج جدول ذیل میں جمع کئے گئے ہیں۔

ربیع اول میں	ب	ربیع دوم میں
جیب . سے ۱ تک بڑھتی ہے جیب ۱ سے . تک گھٹتی ہے		
جیب التمام . سے ۱ تک گھٹتی ہے جیب التمام . سے ۱ تک گھٹتی ہے		
ماس . سے ∞ تک بڑھتا ہے ماس . سے ∞ تک بڑھتا ہے		
ماس التمام . سے ∞ تک گھٹتا ہے ماس التمام . سے ∞ تک گھٹتا ہے		
قاطع ۱ سے ∞ تک بڑھتا ہے قاطع . سے ∞ تک بڑھتا ہے		
قاطع التمام . سے ۱ تک گھٹتا ہے قاطع التمام ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے		

ربیع سوم	و	ربیع چہارم
جیب - ۱ سے . تک بڑھتی ہے جیب . سے ۱ تک گھٹتی ہے		
جیب التمام . سے ۱ تک بڑھتی ہے جیب التمام - ۱ سے . تک بڑھتی ہے		
ماس . سے ∞ تک بڑھتا ہے ماس . سے ∞ تک بڑھتا ہے		
ماس التمام . سے ∞ تک گھٹتا ہے ماس التمام . سے ∞ تک گھٹتا ہے		
قاطع ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے قاطع - ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے		
قاطع التمام - ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے قاطع التمام ∞ سے ۱ تک بڑھتا ہے		

۴۵ - مثنیٰ جملوں کے ادوار

جب کوئی زاویہ صفر سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائرہ ایک پورا چکر لگاتا ہے تو زاویہ کی جیب پہلے صفر سے ایک

بہتی ہے پھر اے۔ ۱۔ تک گھٹتی ہے اور اخیر میں۔ ۱۔ سے صفر تک
بہتی ہے اور اس طرح سے بیشتر اس کے کہ جیب اپنی اصلی قیمت
پھر اختیار کرے اس کے سب تغیرات ظہور میں آتے ہیں۔
اسی طرح سے جب زاویہ 112° سے 174° تک بڑھتا ہے
تو جیب کی قیمت میں وہی تغیرات ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

نیز جب دو زاویوں کا تفاوت 180° قائموں کے برابر ہوتا ہے
تو ان کی سینیں باہم مساوی ہوتی ہیں، اس کو اس طرح بیان کرتے
ہیں کہ جیب کا دور 112° ہے
اسی طرح سے جب کوئی زاویہ بقدر 112° کے بڑھتا ہے تو
اس کی جیب، قاطع اور قاطع التمام کی قیمتوں کے سب تغیرات
ایک دفعہ ضرور تکرار پاتے ہیں۔

لیکن ماس زاویہ کی صورت میں جب زاویہ صفر سے 112° تک بڑھتا
ہے یعنی جب خط دائرہ و قائموں میں حرکت کرتا ہے تو اس کے
سب تغیرات ایک مرتبہ وقوع میں آتے ہیں اور ماس التمام کی
بھی یہی کیفیت ہے۔

پس معلوم ہوا کہ جیب، جیب التمام، قاطع اور قاطع التمام کا
دور 112° ہے اور ماس اور ماس التمام کا صرف 112° ہے
جب کوئی زاویہ بڑھتا ہے تو اس کے مشتی جملوں کی قیمتیں
بار بار تکرار پاتی ہیں اس لئے ان کو جملات دوریہ یا
جملات دورہ کہتے ہیں۔

۶۸۔ مشتی نسبتوں کے تغیرات بذریعہ اشکال اور خطوط

وم کو اس طرح منتخب کرو کہ طول کی ایک اکائی ایک زاویہ
 نیم قطری کو تعبیر کرے۔ اب چونکہ وم سے دو قائلے یعنی ۳۱
 نیم قطری زاوئے تعبیر ہوتے ہیں اس لئے طول وم سے طول
 کی ۳۱ اکائیاں یعنی تقریباً ۱۰۳ اکائیاں تعبیر ہوں گی۔
 اسی طریقے سے منفی زار کے وکی منفی جانب میں طولوں وم وم
 سے تعبیر ہوں گے۔

ہر ایک نقطہ (ع) پر کا عمود ق اُس زاوئے کی جیب کے
 تناسب بناء جو وع سے تعبیر ہوتا ہے اگر جیب مثبت ہوتو
 یہ عمود مثبت سمت میں وما کے متوازی ہوگا اور اگر جیب منفی
 ہوتو یہ منفی سمت میں ہوگا۔

مثلاً چونکہ وم ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے جس کی جیب ۱ ہے اسلئے
 ہم عمود م ب کو طول کی ایک اکائی کے برابر لیں گے، چونکہ وم
 سے دو قائلے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کی جیب صفر ہے اس لئے
 اس نقطہ پر عمود کا طول صفر ہوگا، چونکہ وم تین قائلوں کی
 مقدار کے تناسب ہے اور ان کی جیب ۱ ہے اس لئے م ب پر
 کے عمود کا طول ۱ ہوگا یعنی م ب خط ولا کے نیچے کی طرف
 کھینچا جائے گا اور اس کا طول ایک ہوگا، اگر وع، وم کی
 ایک ہتائی کے برابر ہو تو یہ ۱/۲ قائمہ یعنی ۹۰ کو تعبیر کرے گا اور
 اس کی جیب ۱/۲ ہوگی پس اس صورت میں ہم نقطہ ع پر ایک عمود
 ع ق قائم کریں گے جس کا طول پیمانہ واحد کے طول کا نصف ہوگا
 ان سب خطوط کے سرے ایک خط منحنی پر واقع ہوں گے

جس کی شکل مندرجہ بالا منحنی کی سی ہوگی۔
 پوری شکل کھینچنے سے معلوم ہوگا کہ خط منحنی کے وہاں وہاں جیبوں
 جیسے اور کئی حصے ہیں اور اس کا یہ مطلب ہے کہ جب کوئی
 زاویہ بقدر $\pi/2$ کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب کی وہی قیمتیں
 تکرار پاتی ہیں۔

۶۹۔ جیب التمام کی ترسیم



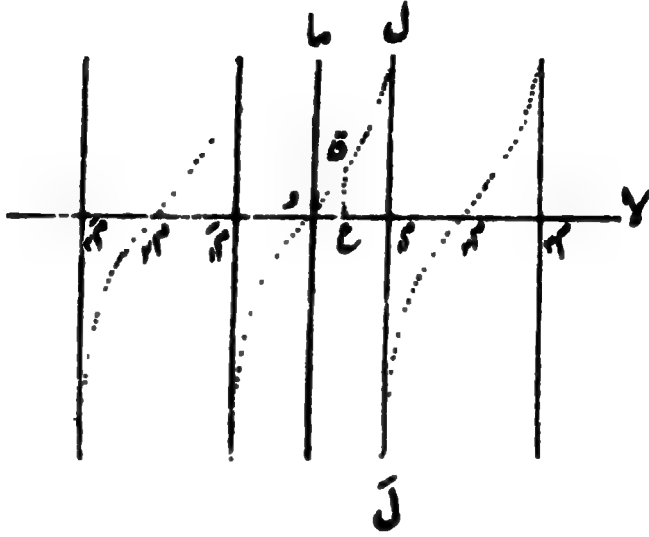
جیب التمام کی ترسیم بھی اسی طرح سے حاصل ہوتی ہے جیسا
 جیب کی، صرف فرق یہ ہے کہ جیب التمام کی صورت میں عمود
 ع ق سے اس زاویہ کی جیب التمام تعبیر ہوتی ہے جو طول
 و ع سے تعبیر ہوتا ہے۔

اگر شکل ۶۸ میں نقطہ و حرکت کر کے م پر آجائے
 اور و ما کا مقام مہربا سے بدل دیا جائے تو جیب التمام کا خط منحنی
 جیب کے بالکل متماثل ہوگا۔

۷۰۔ ماس کی ترسیم

چونکہ زاویہ قائمہ کا ماس غیر متناہی ہوتا ہے اور طول و م
 ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے اس لئے جو عمود نقطہ م پر قائم ہوگا

اس کا طول غیر متناہی ہوگا اور ماس کا منحنی محل کو غیر متناہی فاصلے پر ملے گا۔



اگر زاویہ ایک قائمے سے ذرا زیادہ ہو تو اس کا ماس منحنی اور غیر متناہی ہوگا اسلئے منظر محل کے عین دائیں طرف ماس کا منحنی ایک ایسے مقام سے شروع ہوگا جو وکلا کے نیچے بنتا فاصلے پر واقع ہو۔

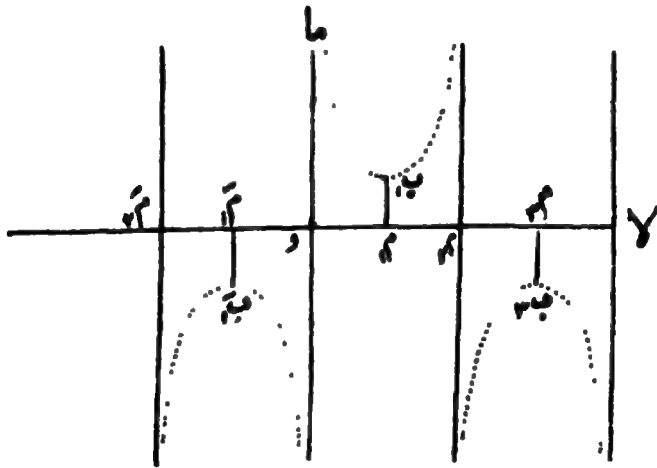
ماس کی ترسیم میں صریحاً بیشمار متاثر اور متوازی حصے شامل ہیں اور ان میں سے ہر ایک حصہ باقی سب سے الگ ہے۔ اس قسم کے خط منحنی کو غیر متسلل کہتے ہیں، برخلاف اس کے جیب اور جیب التمام ہر دو کے منحنی متسلل ہیں۔

۱۷۔ ماس التمام کی ترسیم
اگر ماس التمام کا خط منحنی کھینچا جائے تو وہ وکلا کے

اوپر غیر متناہی فاصلے پر ملے گا، یہ خط نقطہ م میں سے گزرے گا اور نقطہ م پر جو عمود ہوگا اس کو ولا کی منفی جانب میں غیر متناہی فاصلے پر س کرے گا، اس کے بعد م کے عین دائیں طرف یہ خط نقطہ م کے اوپر ایک غیر متناہی فاصلے سے شروع ہوگا اور پہلے حصے کی طرح م میں سے گزرے گا اور م پر کے عمود کو ولا کے نیچے غیر متناہی فاصلے پر س کرے گا وغیرہ وغیرہ۔

تمام التمام کا منحنی غیر متناہی ہوگا اور اس کے ہستار سے ایک دوسرے کے ساتھ ساتھ ترقیب دئے ہوئے ہوں گے۔

۲۷۔ قاطع التمام کی ترسیم



جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اس کی جیب صفر ہوتی ہے اور اس لئے اس کا قاطع التمام غیر متناہی ہوتا ہے لہذا منحنی و ما کو غیر متناہی فاصلے پر ملتا ہے۔

جب زاویہ ایک قائمہ کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع تمام ایک ہوتا ہے اور اس لئے عمود م ب کا طول ایک ہوتا ہے۔
 جب زاویہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع تمام غیر متناہی ہوتا ہے یعنی م پر جو عمود ہو اس کو خط منحنی غیہ متناہی فاصلے پر ملتا ہے۔

نیز جب زاویہ دو قائموں سے ذرا کم ہوتا ہے تو اس کا قاطع تمام + ∞ ہوتا ہے اور جب زاویہ دو قائموں سے ذرا زیادہ ہوتا ہے تو اس وقت قاطع تمام - ∞ ہوتا ہے یعنی جب زاویہ کی قیمت دو قائمہ میں سے ہو کر گذرتی ہے تو دفعہ قاطع الزاویہ کی قیمت + ∞ سے - ∞ ہو جاتی ہے پس معلوم ہوا کہ م کے سین دائیں طرف خط منحنی ولا کے نیچے غیر متناہی فاصلے سے شروع ہوتا ہے

۳۔ قاطع الزاویہ کی ترسیم
 اگر قاطع الزاویہ کا منحنی اسی طرح مرتسم کیا جائے تو اس کی شکل بالکل وہی ہوگی جو قاطع تمام کے منحنی کی ہے صرف وصلاً کو حرکت دیکر م ب پر لے آنا چاہیے۔

مثلاً متفرقہ نمبری (۹)

۱۔ کسی شلت کے ایک زاوے میں فرانسیسی درجوں کی تعداد اتنی ہے جتنی کہ دوسرے زاوے میں انگریزی درجوں کی تعداد ہے اور تیسرے زاوے میں اتنے فرانسیسی ثنائے ہیں جتنے کہ باقی دو کے مجموعہ میں انگریزی

اس شخص کے پاؤں کے نیچے ہے، تین منٹ کے بعد کشتی کا ناوہ یہ شخص
 ۹. ہو جاتا ہے، معلوم کرو کہ کتنی دیر میں کشتی کنارے پہنچے گی۔
 ۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو مساوات جب طہ = لا + $\frac{1}{a}$
 ناممکن ہے۔

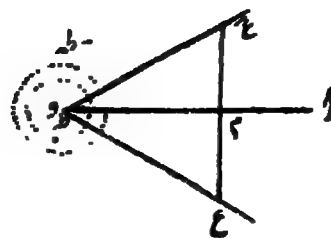
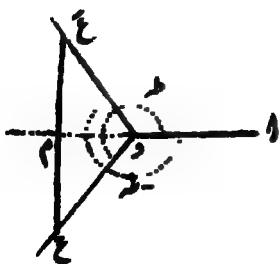
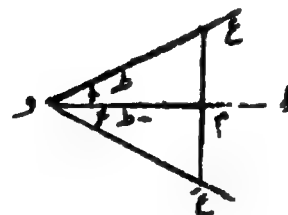
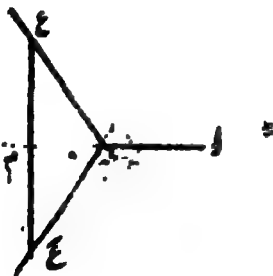
۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات قطاطہ = $\frac{2la}{(a+1)}$ مرت
 اسی صورت میں ممکن ہے جبکہ لا = ما



باب پنجم

کسی مقدار اور علامت کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں

پہلی مرتبہ اس مضمون کا مطالعہ کرتے وقت طالب علم کو چاہئے کہ دفعات ۴، ۵، ۶، ۷ اور ۸ کی چار چار شکلوں میں سے صرف پہلی شکلوں پر ہی توجہ محدود رکھے۔
 ۴ - ایک زاویہ (- طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی تمام قسموں کے لئے طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔



رض کو کہ خط دائر مقام ول سے شروع ہو کر پھر لگتا ہوا مقام وع پر پھٹتا ہے اور اس طرح سے زاویہ طہ مرقم کرتا ہے۔
ول یا ول محدودہ پر عمود عم نکالو اور اس کو ع تک اتنا خارج کرو کہ عم اور م ع باہم برابر ہوں۔

مثلاً موع اور موع میں اضلاع وم اور م ع اضلاع وم اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاوے موع اور موع قائمے ہیں اس لئے (بحکم اقلیدس م اش م) زاوے موع اور موع برابر ہیں اور وع وع کے مساوی ہے۔ ان چاروں شکلوں میں زاویہ اوع کی مقدار (اگر زاوے کو گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں ناپا جائے) زاویہ اوع کی مقدار کے برابر ہے (اگر اس زاوے کو گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ناپا جائے) نیز موع اور موع مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں اسلئے

$$\text{جب (- ط) = } \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \text{۔۔ جب ط}$$

$$\text{جم (- ط) = } \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{سر (- ط) = } \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \text{سر ط}$$

$$\text{مم (- ط) = } \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \text{مم ط}$$

$$\text{قم (- ط) = } \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = \text{قم ط}$$

$$\text{قط (- ط) = } \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \text{قط ط}$$

اس دفعہ میں اور آگے کی دفعات میں شکل کا حوالہ دینے کے بغیر پہلی دو مثلث نسبتوں کی مدد سے آخری چار مثلث نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

$$\text{ثلاثہ مس} (-ط) = \frac{\text{جب} (-ط)}{\text{جم} (-ط)} = \frac{-\text{جب} ط}{\text{جم} ط} = -\text{مس} ط$$

$$\text{م} (-ط) = \frac{\text{جم} (-ط)}{\text{جب} (-ط)} = \frac{\text{جم} ط}{-\text{جب} ط} = -\text{م} ط$$

$$\text{ق} (-ط) = \frac{\text{جب} (-ط)}{\text{جم} (-ط)} = \frac{\text{جب} ط}{\text{جم} ط} = \text{ق} ط$$

$$\text{قط} (-ط) = \frac{\text{جم} (-ط)}{\text{جب} (-ط)} = \frac{\text{جم} ط}{-\text{جب} ط} = -\text{قط} ط$$

$$\text{جب} (-۳۰) = -\text{جب} ۳۰ = -\frac{۱}{۲}$$

مثال

$$\text{مس} (-۹۰) = -\text{مس} ۹۰ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\text{جم} (-۴۵) = \text{جم} ۴۵ = \frac{۱}{\sqrt{2}}$$

۷۷۔ طہ کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۹۰۔ط) کی مثلث

نسبتوں کو طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۴۴ میں جہاں زاویہ، قائرہ سے کم تھا ان ارتباطات پر

ایک دفعہ بحث ہو چکی ہے فرض کرو کہ خط دائر مقام و اس سے

شرع ہو کر زاویہ اُورع منقسم کرتا ہے جہاں اُورع = طہ

زاویہ ۹۰۔طہ حاصل کر لے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر ابتدا

میں بائیں طرف حرکت کرتا ہے اور اس کے بعد ب سے سمت

مخالف میں بعد زاویہ طہ کے اُٹا پھرتا ہے اور اس وقت

اس کا مقام وضع ہوتا ہے ۔

وضع زاویہ مطلوبہ ۹۰ - ط ہے ۔

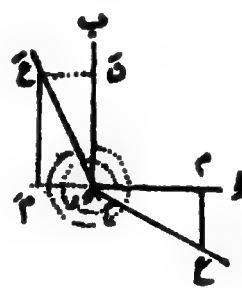
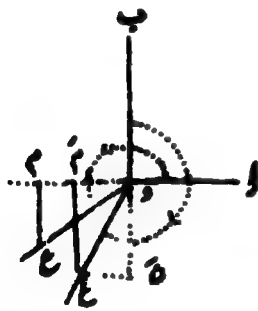
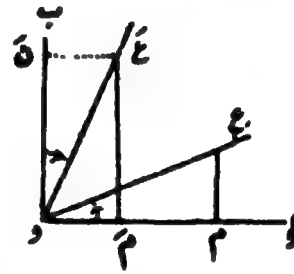
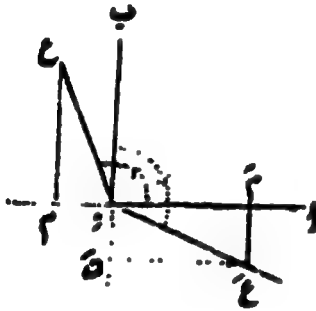
وضع کو وضع کے سادی بناؤ اور عمود وضع اور وضع م خط ابتدائی

و یا او محدودہ پر نکالو نیز وب یا ب و محدودہ پر عمود

ع ن کیجیو ۔

ہر ایک شکل میں اردوئے عمل زاوئے وضع اور ب وضع

تعداداً برابر ہیں ۔



نویس م وضع = ن وضع = د وضع م

چونکہ ہر ایک شکل میں ون اور م ع متوازی ہیں

لہذا مثلث م وضع اور م ع و ہر طرح سے سادی ہیں

اور اس لئے م = م ع تعداداً

اور م = م ع تعداداً

نیز ہر ایک شکل میں وم اور مم ع متقد العلامت ہیں اور نیزه مم ع اور وم کی علامت ایک ہی ہے۔

یعنی وم = مم ع + اور وم = مم ع + مم ع
اسلئے جب (ق۔ ط) = جب اوع = مم ع = مم ع = مم ع = جم ط

جم (ق۔ ط) = جم اوع = مم ع = مم ع = جب ط

مس (ق۔ ط) = مس اوع = مم ع = مم ع = مم ط

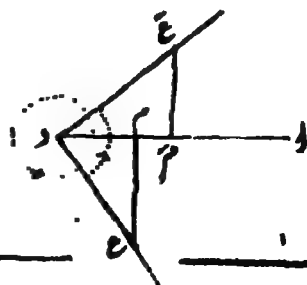
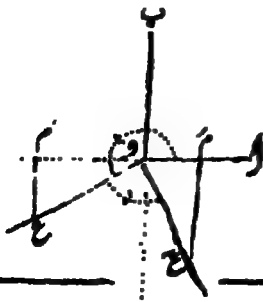
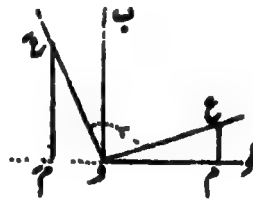
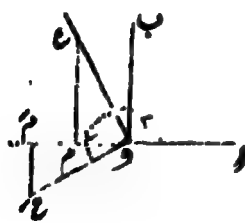
مم (ق۔ ط) = مم اوع = مم ع = مم ع = مس ط

قط (ق۔ ط) = قط اوع = مم ع = مم ع = قم ط

قم (ق۔ ط) = قم اوع = مم ع = مم ع = قط ط

۷۔ زاویہ (ق + ط) کی مثلثی نسبتوں کو طہ کی تمام قیمتوں کے لئے

ط کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ خط دائرہ والے سے شروع ہو کر زاویہ طہ میں تقسیم کرتا ہے اور اُس وقت اُس کا مقام وع ہوتا ہے یعنی زاویہ اوع = طہ فرض کرو کہ اس کے بعد خط دائرہ وع سے مقام وع تک ایک زاویہ قائمہ میں حرکت کرتا ہے یعنی فرض کرو کہ زاویہ اوع = (۹۰ + طہ)

وع کو وع کے مساوی قطع کرو اور عم اور عم عمود او یا او ممدودہ پر نکالو، ہر ایک شکل میں چونکہ وع قائمہ ہے اس لئے زاویوں موع اور عم کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہے۔ اس لئے زاویہ موع = ۹۰ - عم = وع۔ لہذا مثلث موع اور عم و ہر طرح سے باہم مساوی ہیں۔ اس لئے وم اور عم تعداداً مساوی ہیں، اسی طرح سے موع اور وم تعداداً مساوی ہیں۔

ہر ایک شکل میں وم اور عم متحدہ علامت ہیں لیکن موع اور وم کی علامتیں مختلف ہیں یعنی

$$\text{موع} = + \text{وم} \text{ اور } \text{وم} = - \text{موع}$$

اس لئے

$$\text{جب (۹۰ + طہ) = جب اوع = موع = وع = جم طہ}$$

$$\text{جم (۹۰ + طہ) = جم اوع = وع = موع = جب طہ}$$

$$\text{مس (۹۰ + طہ) = مس اوع = وم = موع = - مم طہ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{م (۹۰ + ط)} &= \text{م اوغ} = \frac{\text{م}}{\text{وم}} = \frac{\text{م}}{\text{وم}} = \text{مس ط} \\
 \text{قط (۹۰ + ط)} &= \text{قط اوغ} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \text{قم ط} \\
 \text{لو قم (۹۰ + ط)} &= \text{قم اوغ} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \text{قط ط} \\
 \text{اشد جب ۱۵۰} &= \text{جب (۹۰ + ۹۰)} = \text{جم ۹۰} = \frac{۱}{۲} \\
 \text{جم ۱۳۵} &= \text{جم (۹۰ + ۴۵)} = \text{جب ۴۵} = \frac{۱}{۲\frac{۱}{۲}} \\
 \text{مس ۱۲۰} &= \text{مس (۹۰ + ۳۰)} = \text{م ۳۰} = \frac{۱}{۳}
 \end{aligned}$$

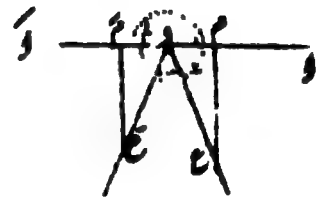
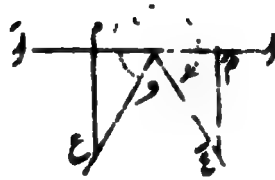
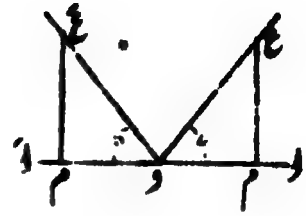
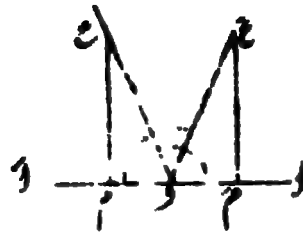
واویا و کتیلہ

— — —

جب دو زاویوں کا مجموعہ دو قانونوں کے برابر ہو تو ان میں
ہر ایک کو دوسرے کا کتیل یا مکملہ کہتے ہیں مثلاً کسی زاویہ طہ کا
مکملہ ۹۰ - طہ ہے۔

$$\begin{aligned}
 \text{۱۵۰} &= ۳۰ - ۱۸۰ = \text{۲۰ کا مکملہ} \\
 \text{۱۲۰} &= ۶۰ - ۱۸۰ = \text{۱۲۰ کا مکملہ} \\
 \text{۱۶۵} &= ۱۵ - ۱۸۰ = \text{۱۶۵ کا مکملہ} \\
 \text{۱۲۶} &= ۵۴ - ۱۸۰ = \text{۱۲۶ کا مکملہ} \\
 \text{۱۳۰} &= ۵۰ - ۱۸۰ = \text{۱۳۰ کا مکملہ}
 \end{aligned}$$

۸ - زاویہ (۹۰ - طہ) کی مثلث نسبتیں طہ کی تمام قیمتوں کے لئے
طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کر کہ خط دائر مقام $و$ سے شروع ہو کر زاویہ $اوع$ ($= ط$)
سم کرتا ہے۔

یہ $۱۸۰ - ط$ حاصل کرنے کے لئے فرض کر دو کہ خط دائر $و$ سے
وج ہو کر دو قائلے متقسم کرتا ہے اور مقام $و$ پر پہنچتا ہے اس کے
ت مخالف میں بقدر زاویہ $ط$ کے حرکت کر کے مقام $و$ پر
ہے اور اس طرح سے ایک ایسا زاویہ $اوع$ متقسم کرتا ہے
مقدار میں زاویہ $اوع$ کے مساوی لیکن علامت میں اس سے
مت ہوتا ہے۔

ہرے کہ زاویہ $اوع = ۱۸۰ - ط$
 $ع$ کو $و$ کے برابر قطع کر دو اور $و$ پر $ع$ اور $م$ عمود مخالف
ئے $م$ و $و$ اور $م$ و $ع$ برابر ہیں اور اس لئے مثلث $م و ع$
 $م$ و $ع$ ہر طرح سے مساوی ہیں لہذا $وم$ اور $وم$ مقدار میں

برابر ہیں اور نیز م ع اور م غ بھی باہم مساوی ہیں۔
 ہر ایک شکل میں وم اور و م مختلف سمتوں میں پہنچنے کے لئے ہیں
 لیکن م ع اور م غ ایک ہی سمت میں پہنچنے کے لئے ہیں۔ یعنی
 و م = م ع اور م غ = م ع

جب (۱۸۰-ط) = جب ا و ع = م ع = م ع = جب ط
 جم (۱۸۰-ط) = جم ا و ع = و ع = و ع = جم ط
 س (۱۸۰-ط) = س ا و ع = م ع = م ع = س ط
 م (۱۸۰-ط) = م ا و ع = و ع = و ع = م ط
 ق (۱۸۰-ط) = ق ا و ع = و ع = و ع = ق ط
 ق م (۱۸۰-ط) = ق م ا و ع = و ع = و ع = ق م ط
 مثلہ جب ۱۲۰ = جب (۱۸۰-۶۰) = جب ۶۰ =

جم ۱۳۵ = جم (۱۸۰-۴۵) = جم ۴۵ =

س ۱۵۰ = س (۱۸۰-۳۰) = س ۳۰ =

۷۹- ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۱۸۰+ط) کی مثلث

نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

ارتباطات مطلوبہ دفعہ گذشتہ کے موافق بذریعہ اشکال ہندسیہ

حاصل ہو سکتے ہیں، اس سلسلہ کی اشکال گھینپنے میں وقت بھڑکی طالعلم کے لئے دو برائے شق چھوڑ دی گئی ہیں۔

نیز تعلقات مذکورہ کا استنباط نتائج دفعہ ۷۶ سے بھی ہو سکتا ہے جو زاویہ کی کسی مقدار کے لئے صحیح ثابت کئے گئے ہیں مثلاً فرض کرو کہ $90^\circ = ط + ب$

اس لئے جب $(180^\circ + ط) = جب (90^\circ + ب) = جم ب (دفعہ ۷۶)$

$= جم (90^\circ + ط) = - جب ط (دفعہ ۷۶)$

اور جم $(180^\circ + ط) = جم ب + 90^\circ = - جب ب (دفعہ ۷۶)$

$= - جب (90^\circ + ط) = - جم ط (دفعہ ۷۶)$

نیز $س (180^\circ + ط) = س (90^\circ + ط) = - مم ب$

$= - مم (90^\circ + ط) = س س ط$

اور اسی طرح سے $مم (180^\circ + ط) = مم ط$

$قط (180^\circ + ط) = - قط ط$

$قم (180^\circ + ط) = - قم ط$

۸۰۔ ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ $(90^\circ + ط)$ کی مثلثی

نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خط دائرہ کوئی زاویہ ط مرسم کرنے کے بعد کسی خاص

مقام پر واقع ہے، اب اگر یہ مثبت سمت میں ایک پورا چکر لگائے

یعنی زاویہ $360^\circ + ط$ مرسم کرے تو اس کے مقام میں کوئی فرق

نہیں آئے گا، خط دائرہ بعینہ اسی مقام پر ہو گا جہاں پہلے تھا۔

معلوم ہوا کہ زاویہ $360^\circ + ط$ کی مثلثی نسبتیں وہی ہوتی ہیں جو

زاویہ ط کی ہیں۔

اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی زاویہ پر ۶۰° یا ۶۰° کا کوئی ضیعت زیادہ کرنے یا مقدار زاویہ سے ۶۰° یا اس کا کوئی ضیعت کم کرنے سے اس کی شلشی نسبتوں میں کچھ فرق نہیں آتا۔

۸۱۔ اس باب کے مسائل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑے زاویے کی شلشی نسبتوں کی تحویل ایک ایسے زاویے کی شلشی نسبتوں میں ہو سکتی ہے جو : اور ۵۴° کے درمیان واقع ہو۔

مثلاً جب $۱۷۶۵ =$ جب $(۳۶۰ \times ۳ + ۳۲۵) =$ جب ۳۲۵ (دفعہ ۸۰)

$=$ جب $(۱۸۰ + ۱۴۵) =$ جب ۱۴۵ (دفعہ ۷۹)

$=$ جب $(۳۵ - ۱۸۰) =$ جب ۳۵ (دفعہ ۷۸)

مس $۱۹۰ =$ مس $(۳۶۰ \times ۳ + ۱۱۰) =$ مس ۱۱۰ (دفعہ ۸۰)

$=$ مس $(۹۰ + ۲۰) =$ مس ۲۰ (دفعہ ۷۶)

اور رقم $(۱۴۶۵) =$ رقم ۱۴۶۵ (دفعہ ۷۴)

$=$ رقم $(۳۶۰ \times ۳ + ۲۵) =$ رقم ۲۵ (دفعہ ۸۰)

اسی طرح سے اور زاویوں کی تحویل ہو سکتی ہے، سب سے اول

زاویہ مجوزہ سے ۶۰° کے اضعات تفریق کرتے جاؤ جب تک کہ

زاویہ : اور ۶۰° کے درمیان نہ آجائے، اب اگر یہ ۱۸۰° سے

بڑا ہو تو اس میں سے ۱۸۰° منفی کرو، اس کے بعد اگر یہ ۹۰° سے بڑا ہو تو ضابطہ دفعہ ۷۶

کو استعمال کرو اور آخر الامر اگر ضرورت ہو تو ضابطہ دفعہ ۷۵ کی مدد لو۔

۸۲۔ قائمہ سے بڑے چند مشہور زاویوں کی صورت میں جدول دفعہ ۷۴

کی توسیع اس طرح ہو سکتی ہے۔

۱۸۰	۱۵۰	۱۳۵	۱۲۰	۹۰	۶۰	۴۵	۳۰	:	زادہ
.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$.	تہذیب
۱۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	۱	تہذیب
.	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۸	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$.	عاس
۸	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۸	عاس
۸	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۸	عاس
۸	۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۲	۸	تہذیب
۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۲	۸	۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	تہذیب

اشلہ نمبری (۱۰)

ثابت کرو کہ

- ۱۔ جب ۲۲۰ جم ۳۹۰ + جم (۳۰۰) جب (۳۰۰) = ۱
 - ۲۔ جم ۵۶۰ جب ۱۵۰ ۔ جب ۳۳۰ جم ۳۹۰ = ۰
 - ۳۔ مس ۲۲۵ جم ۲۰۵ + مس ۶۵ جم ۶۵ = ۰
- اگر ۱ کی قیمتیں منفصل ذیل ہوں تو جم ۱ ۔ جب ۱ اور مس ۱ + جم ۱ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴۔ $\frac{۳۳}{۳۳}$

۵۔ $\frac{۳۳}{۳۳}$

۶۔ $\frac{۳۳}{۳۳}$

۸۔ $\frac{۳۳}{۳۳}$

۹۔ $\frac{۳۳}{۳۳}$

۱ کی قیمتیں دریافت کرو جو : اور ۳۹۰ کے درمیان ہوں جبکہ

۱۰۔ جم ۱ = $\frac{۱}{۳۳}$

۹۔ جب ۱ = $\frac{۱}{۳۳}$

۱۲۔ جم ۱ = $\frac{۱}{۳۳}$

۱۱۔ مس ۱ = $\frac{۱}{۳۳}$

۱۴۔ جم ۱ = $\frac{۱}{۳۳}$

۱۳۔ قضا ۱ = $\frac{۱}{۳۳}$

مقادیر ذیل کو ایک ایسے مثبت زاویہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو جو ۲۵ سے کم ہو۔

۱۶۔ جم (۲۴)

۱۵۔ جب (۶۵)

۱۸۔ جب ۱۶۰

۱۷۔ مس ۳۷

۲۰۔ مس (۲۴۶)

۱۹۔ جم ۲۸۷

۲۱ - جب ۸۴۳ - ۲۲ - جم (-۹۲۸)

۲۳ - مس ۱۱۴۵ - ۲۴ - جم ۱۴۱۰

۲۵ - مم (-۱۰۵۴) - ۲۶ - قط ۱۳۲۷

۲۷ - تم (-۷۵۶)

۱ کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ۱ + جم ۱ کی علامات دریافت کرو

۲۸ - ۱۴۰ - ۲۹ - ۷۷۸ - ۳۰ - ۳۵۶ - ۳۱ - ۱۱۳۵

۱ کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ۱ - جم ۱ کی علامات دریافت کرو -

۳۲ - ۲۱۵ - ۳۳ - ۸۲۵ - ۳۴ - ۱۳۴۳ - ۳۵ - ۳۵۷۰

۳۶ - ان سب ناویوں کی محوب اور محوب التمام دریافت کرو جو پہلے چار بیوں

میں واقع ہوں اور جن کے ماس ۱۳۵ جم کے برابر ہوں -

ثابت کرو کہ

۳۷ - جب (۲۷۰ + ۱) = جم ۱ اور مس (۲۷۰ + ۱) = مم ۱

۳۸ - جم (۲۷۰ - ۱) = جب ۱ اور مم (۲۷۰ - ۱) = مس ۱

۳۹ - جم ۱ + جب (۲۷۰ + ۱) - جب (۲۷۰ - ۱) + جم (۲۷۰ + ۱) =

۴۰ - قط (۲۷۰ - ۱) قط (۲۷۰ - ۱) - مس (۲۷۰ - ۱) مس (۲۷۰ - ۱) + ۱ =

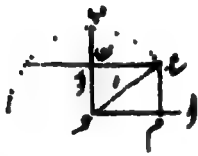
۴۱ - مم ۱ + مس (۲۷۰ + ۱) + مس (۲۷۰ - ۱) + مس (۲۷۰ - ۱) =

باب ششم

جملات عامہ اُن زاویوں کے لئے جو ایک مقررہ مثلثی نسبت ہو

۸۳۔ ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بنا جس کی جیب ایک کسر واجب ا کے برابر ہو۔

فرض کرو کہ وا خط ابتدائی ہے اور وب مثبت سمت میں وا پر



عمود ہے، وب پر فاصلہ ون برابر ا کے ناپو۔ [اگر ا منفی ہو تو نقطہ

ن 'ب و محدودہ پر واقع ہوگا۔]

نقطہ ن سے ن ع متوازی وا کے کہینچو اور و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کہینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو خط ن ع کو نقطہ ع پر ملے تب اوع زاویہ مطلوبہ ہوگا۔

وا پر عمود ع م نکالو پس

$$\text{جب اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ون}}{\text{و ع}} = \frac{ا}{۱} = ا$$

زاویہ اوع کی جیب مقدار معلومہ کے برابر ہے اسلئے اوع

زاویہ مطلوبہ ہے

۸۴۔ ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جسکی جیب تمام



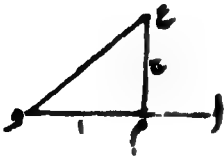
ایک کسر واجب ب کے برابر ہو
خط ابتدائی پر ایک فاصلہ دم برابر ب
کے قطع کرو اور وا پر عمود م ع نکالو
اگر ب منفی ہو تو م نقطہ وکی دوسری
طرف او ممدودہ پر واقع ہوگا

و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک
ہو اور ج م ع کو نقطہ ع پر لے۔
اوع زاویہ مطلوبہ ہے کیونکہ

$$\text{جم اوع} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \text{ب}$$

۸۵۔ ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کا
ماس ج کے برابر ہو۔

خط ابتدائی پر وم برابر ایک کے لو
اور نقطہ م پر ایک عمود م ع برابر
ج کے قائم کرو۔ تب



$$\text{مس اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \text{ج}$$

پس اوع زاویہ مطلوبہ ہے

۸۶۔ دفعہ ۵۶ کی تعریفات سے ظاہر ہے کہ جب کوئی

زاویہ معلوم ہو تو اس کی جیب بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر اس کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ ایک سے زیادہ زاویے ایسے ہوتے ہیں جن کی ایک ہی جیب ہو مثلاً ذیل کے سب زاویوں کی جیب $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے۔

۳۰° ، ۱۵۰° ، ۳۹° ، ۶۱° ، ۱۸۰°

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی زاویہ کی جیب دی ہوئی ہو تو زاویہ کی مقدار صحیح طور پر معلوم نہیں ہو سکتی، صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ زاویوں کی تعداد کثیر میں سے کوئی ایک زاویہ مطلوبہ زاویہ ہے۔

جب کسی زاویے کی جیب اتمام، ماس یا اور مثلثی نسبتیں معلوم ہوں تو اسی قسم کے بیانات صادق آتے ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ اگر کسی زاویے کی کوئی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو مقدار زاویہ بغیر اشتباہ کے معلوم نہیں ہو سکتی۔
۸۷۔ فرض کرو کہ خط دائرہ و ع خط ابتدائی وا پر منطبق ہوتا ہے اس سے ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ خط دائرہ و ع

مثبت یا منفی سمت میں ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳..... چکر لگائے ہیں۔

لیکن جب خط دائرہ ایک چکر لگاتا ہے تو اس کا زاویہ مرتبہ

۲۲ نیم قطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے جب

خط دائرہ خط ابتدائی وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتبہ

مثبت یا منفی سمت میں ۲۲ کا ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳..... گنا ہوتا

ہے یعنی، یا ۲۲± ، یا ۴۴± ، یا ۶۶± ، ہوتا ہے

اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب خط دائر خط ابتدائی پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتبہ 2π ہوتا ہے جہاں n مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۸۸۔ مسئلہ ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔
فرض کرو کہ زاویہ α (ع) = (ع)

کی جیب معلوم ہے۔



وہاں پر $\sin \alpha = \sin \beta$ نکالو اور α کو β کے اتنا خارج کرو کہ β برابر α کے ہو اور β کو متوازی اور مساوی α کے بناؤ۔

بوجب دفعہ ۸، زاویہ $\alpha = \beta$ ۔ ع

جب خط دائر مقام α یا β پر (اور صرف انہی دو مقامات پر) ہوتا ہے تو اس کے زاویہ مرتبہ کی جیب، جیب معلومہ کے برابر ہوتی ہے۔

جب خط دائر مقام α پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد زاویہ α مرتبہ کیا ہے یعنی بوجب دفعہ گزشتہ اسنے زاویہ

$$2\pi + \alpha \text{ (۱)}$$

مرتبہ کیا ہے جہاں α صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہو سکتی ہے۔

خطیاتی مقام ~~و ج پر ہوتا ہے~~ ~~میں ہر ایک~~ کے اس نے ایک

زاویہ $۲\pi +$ اوج یعنی ایک زاویہ $۲\pi + \pi - \epsilon$

یعنی $(۱+۲)\pi - \epsilon$ (۲)

مرتم کیا ہے جہاں صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہو سکتی ہے۔

اوپر کے سب زاوے جملہ

$n + \pi - (۱+۲)\pi$ (۳)

میں شامل ہیں جہاں n صفر یا مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر

ہو سکتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اگر $n = ۲ - (۱+۲)\pi$ تو $۱+۲\pi$

اور جملہ (۳) میں n کی یہ قیمت مندرج کرنے سے $۲\pi + \epsilon$

حاصل ہوتا ہے اور یہ بعینہ جملہ (۱) ہے

نیز اگر $n = ۱+۲\pi$ تو $(۱+۲)\pi - ۱+۲\pi = ۱ - \epsilon$ اور جملہ (۳) میں

n کی یہ قیمت رکھنے سے $(۱+۲)\pi - \epsilon$ حاصل ہوتا ہے اور

یہ بعینہ جملہ (۲) ہے

نتیجہ صریح - اب چونکہ قاطع انعام جیب کا متکافی ہے اسلئے

جن زاویوں کی جیوب باہم برابر ہوں ان کے قاطع انعام

بھی برابر ہونگے اور اس لئے جملہ (۳) میں وہ سب زاویے

شامل ہیں جن کا قاطع انعام وہی ہو جو ϵ کا ہے۔

۸۹- مسئلہ - ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی

جیب انعام ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو

فرض کرو کہ زاویہ اوج کی جیب انعام مقدار معلومہ کے برابر ہے



نواویہ کو عہ سے تعبیر کرو۔

نود ح م نکالو اور اس کو ع م نک

نا خارج کرو کہ م ع = ع م

بب خط دائر مقام وع یا وع (اور

انہی دو مقامات) پر ہوتا ہے تب

مرسم کی جیب التمام جیب التمام معلومہ کے برابر ہوتی ہے دیکھو دفعہ ۸۴

جب خط دائر مقام وع پر ہو تو اس وقت اس نے چند پورے

انے کے بعد ایک زاویہ عہ مرسم کیا ہے یعنی اس وقت

نے ایک زاویہ ۲ ن π + عہ مرسم کیا ہے جہاں ن صفر یا

مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

جب خط دائر مقام وع پر ہو تو اس نے چند پورے چکر لگانے

بعد زاویہ عہ مرسم کیا ہے یعنی ایک زاویہ ۲ ن π - عہ مرسم

ہے۔

اور یہ سب زاویئے جملہ

۲ ن $\pi \pm$ عہ (۱)

شامل ہیں جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

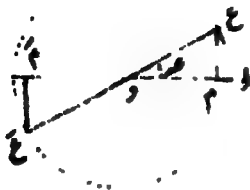
ملاحظہ۔ جملہ (۱) میں وہ سب زاویئے شامل ہیں جن کا قاطع

ہے جو عہ کا ہے۔

مسئلہ۔ اُن سب زاویوں کے لئے جن کا ایک ہی

ن ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کوئی زاویہ لوع = عہ اور اس کا ماس ماس معلوم کے



برابر ہے α کو α تک خارج
کر دیا α کو α کے برابر بناؤ
وہ پر عمود α نکالو
بموجب وضع α ماس زاویہ α
ماس زاویہ α کے مساوی ہے
نیز زاویہ $\alpha = \alpha + \pi$

جب خط دائر مقام α پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر
لگانے کے بعد زاویہ α مرتسم کیا ہے۔
یعنی اس نے زاویہ

$$(۱) \dots\dots\dots ۲۰ + \pi + \alpha$$

مرتسم کیا ہے جہاں α صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے
جب خط دائر مقام α پر ہو تو اس نے زاویہ $\alpha + \pi + (۲۰ + \pi)$
یعنی زاویہ $(۲۰ + \pi) + \alpha$ مرتسم کیا ہے۔
اوپر کے تمام زاوے جلد

$$(۲) \dots\dots\dots \alpha + \pi$$

میں شامل ہیں جہاں α صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
اور اس کی وجہ یہ ہے کہ جب α جنت ہو (یعنی $\alpha = ۲$) تو جلد
(۳) سے وہی زاوے حاصل ہوتے ہیں جو جلد (۱) میں شامل
ہیں۔

نیز جب α طاق ہو (یعنی $\alpha = ۱ + ۲$) تو

جلد (۳) سے دسب زاوے حاصل ہوتے ہیں جو (۲) میں شامل کیا
نتیجہ صریح - جلد (۳) میں دسب زاوے شامل ہیں جبکہ اس تمام
دہی ہو جو وہ کا ہے -

۹۱ - دفعات ۸۸، ۸۹ اور ۹۰ میں زاوہ وہ کوئی زاوہ ہے
جو شرائط معلومہ کو پورا کرتا ہے، مگر علی مثالوں میں بالعموم بہتر ہوگا
کہ وہ چھوٹے سے چھوٹا وہ مثبت زاوہ منتخب کیا جائے جو شرائط
سوال کو پورا کرے -

مثال ۱ - اُن سب زاویوں کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کرو -

(۱) جن کی جیب $\frac{3}{4}$ کے برابر ہو

(۲) جن کی جیب انعام $\frac{1}{2}$ کے برابر ہو

(۳) جن کا ماس $\frac{1}{4}$ کے برابر ہو

(۱) چھوٹے سے چھوٹا زاوہ جس کی جیب $\frac{3}{4}$ ہو یعنی $\frac{\pi}{4}$ کے
برابر ہوتا ہے اس لئے بوجب دفعہ ۸۶ اُن سب زاویوں کے لئے جن کی
جیب $\frac{3}{4}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} \text{ ہوگا}$$

(۲) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاوہ جس کی جیب انعام $\frac{1}{2}$ ہو

۶۲ یعنی $\frac{\pi}{6}$ کے برابر ہوتا ہے

اس لئے بوجب دفعہ ۸۹ اُن سب زاویوں کے لئے جنکی جیب انعام $\frac{1}{2}$
ہو ایک جملہ عامہ

$$n\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ ہوگا}$$

(۳) چوتھے سے چوتھا مثبت زاویہ جس کا ماس $\frac{\pi}{4}$ ہو ۳۰ یعنی $\frac{\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۹۰ ان سب زاویوں کے لئے جن کا ماس $\frac{\pi}{4}$ ہو ایک جلا عام

$$n \pi + \frac{\pi}{4} \text{ ہوگا}$$

مثال ۲۔ ط کی قیمت عام دریافت کرو جو شرائط مساوات جب ط = $\frac{\pi}{4}$ کو پورا کرے۔

اس صورت میں جب ط = $\frac{\pi}{4}$ علامت مثبت لینے سے

$$\text{جب ط} = \frac{\pi}{4} = \text{جب } \frac{\pi}{4} \\ \therefore \text{ط} = n \pi + \frac{\pi}{4} (1 - \frac{\pi}{4})$$

علامت منفی لینے سے

$$\text{جب ط} = -\frac{\pi}{4} = \text{جب } (-\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore \text{ط} = n \pi + \frac{\pi}{4} (1 - (-\frac{\pi}{4}))$$

ط کی قیمت کے دونوں جملوں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{ط} = n \pi + \frac{\pi}{4} (1 - (-\frac{\pi}{4}))$$

$$\text{یا } \text{ط} = n \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

مثال ۳۔ ط کی قیمت عام دریافت کرو جو شرائط مساوات

جب ط = $\frac{\pi}{2}$ اور مس ط = $\frac{\pi}{4}$ کو پورا کرے۔

ط کی قیمتیں جو ۹۰ کے درمیان واقع ہیں اور جو شرائط مساوات

جب ط = $\frac{\pi}{2}$ کو پورا کرتی ہیں صرف ۲۱۰ اور ۳۳۰ ہیں اسی طرح

سے طہ کی قیمتیں ایک مس طہ = $\frac{1}{100}$ مرت ۳۰ اور ۲۱۰ ہیں طہ کی قیمت جو : اور ۳۶۰ کے درمیان واقع ہے اور جو مذکورہ بالا دونوں شرائط کو پورا کرتی ہے مرت ۲۱۰ یعنی $\frac{1}{4}$ ہے
اس لئے طہ کی قیمت عام اس زاویہ یعنی $\frac{1}{4}$ پر ۳۴ قانونوں کا کوئی صنف زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور اس لئے ۳۴ $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صنف مدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۱

طہ کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جو شرائط معادلات ذیل کو پورا کریں

- | | |
|-----------------------------|--|
| ۱- جب طہ = $\frac{1}{4}$ | ۲- جب طہ = $\frac{3}{4}$ |
| ۳- جب طہ = $\frac{1}{100}$ | ۴- جب طہ = $\frac{1}{4}$ |
| ۵- جب طہ = $\frac{3}{4}$ | ۶- جب طہ = $\frac{1}{100}$ |
| ۷- مس طہ = $\frac{3}{4}$ | ۸- مس طہ = ۱ |
| ۹- مم طہ = ۱ | ۱۰- قاطہ = ۲ |
| ۱۱- قہ طہ = $\frac{2}{3}$ | ۱۲- جب طہ = ۱ |
| ۱۳- جم طہ = $\frac{1}{100}$ | ۱۴- مس طہ = $\frac{1}{100}$ |
| ۱۵- ۴ جب طہ = ۳ | ۱۶- ۲ مم طہ = قہ طہ |
| ۱۷- قاطہ = $\frac{2}{3}$ | ۱۸- طہ کی قیمت عام دریافت کرو جو شرائط معادلات جم طہ = $\frac{1}{100}$ |

اور مسطہ = ۱ کو پورا کرے

۱۹- طہ کی قیمت عام دریافت کرد جو شرائط معادلات مم طہ = ۳۴۴ اور قسط = ۲ کو پورا کرے۔

۲۰- اگر حجم (ا-ب) = $\frac{1}{4}$ اور جب (ا+ب) = $\frac{1}{4}$ تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز ان کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرد۔
۲۱- اگر مس (ا-ب) = ۱ اور قسط (ا+ب) = $\frac{2}{3}$ تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز ان کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرد۔

۲۲- ۰ اور ۳۶۰ کے درمیان جن زاویوں کی (۱) جیب $\frac{3}{4}$ ہوں (۲) جیب انعام = $\frac{1}{4}$ ہوں (۳) ماس $\frac{1}{4}$ ہوں انکو دریافت کرد۔
۲۳- اگر صرف ان زاویوں کو ملحوظ رکھا جائے جو ۰ اور ۱۸۰ کے درمیان واقع ہوں تو معلوم کرد کہ ذیل کی مختلف صورتوں میں لا کی کتنی قیمتیں ہیں (۱) جب لا = $\frac{5}{6}$ (۲) حجم لا = $\frac{1}{6}$ (۳) حجم لا = $\frac{2}{3}$

(۴) مس لا = $\frac{2}{3}$ (۵) مم لا = ۷

۲۴- زاویہ لا معلوم ہے، زاویہ ما بناؤ اگر (۱) جب ما = ۲ جب لا

(۲) مس ما = ۳ مس لا (۳) حجم ما = $\frac{1}{4}$ حجم لا اور (۴) قسط ما = قسط لا

۲۵- ثابت کرد کہ ذیل کے دونوں صوابوں سے وہی زاوے تعبیر

ہو تے ہیں (۱) $\frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n)$ اور (۲) $\frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n)$

جہاں n کوئی صحیح عدد ہے۔

۲۶- ثابت کرد کہ ذیل کے دو صوابوں

(۱) $\frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n)$ اور (۲) $\frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n) + \frac{\pi}{4} (1-n)$ سے

وہی زاوے تعبیر ہوتے ہیں جہاں n کوئی صحیح عدد ہے، شکل سے

کی تو منیج کرو۔

۱۔ اگر طہ = م = ن + (۱-ن) بہ تو

م کرد کہ طہ = م + ن + م + بہ یا

= (۱+م) + ن + م - بہ چاں م اور ن کوئی دو صحیح عدد ہیں۔

۱۔ اگر جم ک طہ + جم ق طہ = ۰ تو ثابت کرد کہ اس مساوات کو کرنے سے طہ کی مختلف قیمتوں کے دو حسابہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں جن میں

= ایک کا فرق مشترک $\frac{۱۲}{۱+ق}$ ہے اور دوسرے کا $\frac{۱۲}{ق-۱}$

۱۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب $\frac{۳}{۱+۲}$ ہو۔

۹۔ جس مساوات میں کسی زاویہ غیر معلومہ کی مثلثی نسبتیں ل ہوں اس کو مثلثی مساوات کہتے ہیں۔

مساوات کا حل پورے طور پر حاصل نہیں ہوتا جب تک کہ سب زاویوں کے لئے جو شرائط مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ جملہ عامہ حاصل نہ ہو جائے۔

مثلثی مساوات کی چند آسان مثالیں دفعہ ذیل میں مندرج ہیں۔

۹۔ مثال ۱۔ مساوات ۲ جب ۱ + ۱ + ۱ = ۰ کو حل کرو۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

۲ - ۲ جم ۱ + ۱ جم ۱ + ۱ = ۰

یعنی ۲ جم ۱ - ۱ جم ۱ - ۱ = ۰

یعنی (جم ۱ - ۱) (جم ۱ + ۱) = ۰

معلوم ہوا کہ شرائط مساوات معلومہ، جم ۱ = ۱ یا جم ۱ = -۱ سے پوری

ہوتی ہیں۔

چونکہ کسی زاوئے کی جیب اتمام تعداداً ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی اس لئے پہلے جزو فریبی سے کوئی قیمت مساوات حاصل نہیں ہوتی۔
چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب اتمام - $\frac{11}{4}$ ہے
۵۰ یعنی $\frac{11}{4}$ ہے۔

اس لئے جس زاویہ کی جیب اتمام - $\frac{11}{4}$ ہو اس کی عام سے عام قیمت
 $2n = \frac{11}{4}$ ہوگی (دفعہ ۸۹)
اور مساوات معلومہ کی قیمت عام بھی یہی ہوگی۔
مثال ۲۔ مساوات مس ۵ طہ = مم ۲ طہ کو حل کرو
یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے
مس ۵ طہ = مس $(\frac{11}{4} - ۲ طہ)$ ۔

اس زاویہ کی عام سے عام قیمت جس کا ماس وہی ہو جو $\frac{11}{4} - ۲ طہ$ کا ہے
بموجب دفعہ ۹۰، $n = \frac{11}{4} - ۲ طہ$ ہے جہاں n کوئی مثبت یا منفی
صحیح عدد ہے۔

اس لئے مساوات مجوزہ کا عام سے عام حل
 $5 طہ = 2n + \frac{11}{4} - 2 طہ$ ہے
اس لئے طہ = $\frac{1}{2} (2n + \frac{11}{4})$ جہاں n کوئی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۲

مساوات ذیل کو حل کرو

۱۔ جم طہ - جب طہ - $\frac{1}{4}$ = ۰

- ۲- ۲- جب ط + ۳ جم ط = ۰
- ۳- ۲- ۳ جم ط = جب ط
- ۴- ۳- جم ط + جم ط = ۱
- ۵- ۴- ۳ جم ط - ۳ قط ط = ۲ بس ط
- ۶- ۴- جب ط - ۲ جم ط + $\frac{1}{3}$ = ۰
- ۷- ۶- مس ط - (۳ + ۳) مس ط + ۳ = ۰
- ۸- ۸- مم ط + (۳ + $\frac{1}{3}$) مم ط + ۱ = ۰
- ۹- ۹- مم ط - وب مس ط = ۱- ب
- ۱۰- ۱۰- مس ط + مم ط = ۲
- ۱۱- ۱۱- قط ط - ۱ = (۱- ۳) مس ط
- ۱۲- ۱۲- ۳ (قط ط + مس ط) = ۵
- ۱۳- ۱۳- مم ط + مس ط = ۲ مم ط
- ۱۴- ۱۴- ۳ جم ط + ۳ = ۲ (۱+ ۳) جم ط
- ۱۵- ۱۵- ۳ جب ط - ۲ جب ط = ۱
- ۱۶- ۱۶- جب ط = ۱۹- جب ۵ ط = $\frac{1}{3}$
- ۱۷- ۱۷- جب ۹ ط = جب ط
- ۱۸- ۱۸- جب ۳ ط = جب ۲ ط
- ۱۹- ۱۹- جم ط = جم ن ط
- ۲۰- ۲۰- جب ۲ ط = جم ۳ ط
- ۲۱- ۲۱- جم ۵ ط = جم ۴ ط
- ۲۲- ۲۲- جم مم ط = جب ن ط
- ۲۳- ۲۳- مم ط = مس ۸ ط
- ۲۴- ۲۴- مم ط = مس ن ط
- ۲۵- ۲۵- مس ۲ ط = مس $\frac{2}{3}$
- ۲۶- ۲۶- مس ۳ ط = جم ط
- ۲۷- ۲۷- مس ۲ ط = مس ۱
- ۲۸- ۲۸- مس ۳ ط = مم ط

۲۹- مس^۲ ط = مس^۲ ع - ۳۰ - ۳ مس^۲ ط = ۱

۳۱- مس م لا + مم ن لا = ۰

۳۲- مس (ن مم ط) = مم (ن مس ط)

۳۳- جب (ط - ع) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (ط + ع) = $\frac{۱}{۲}$

۳۴- جم (۲ لا + ۱ ع) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (۳ لا + ۲ ع) = $\frac{۳}{۲}$

۳۵- وہ سب زاوئے دریافت کرو جو ۰ اور ۹۰ کے درمیان واقع ہوں

اور جو شرائط مساوات قط^۲ ط ق^۲ ط + ۲ ق^۲ ط = ۸ کو پورا کریں

۳۶- اگر مس^۲ ط = $\frac{۵}{۲}$ تو سطح دریافت کرو

اور مشتبه جواب کی وجہ بیان کرو

۳۷- اگر کسی زاویہ کا سہم^۲ تمام $\frac{۱}{۲}$ ہو تو اس کی جیب^۲ تمام اور مس^۲ تمام

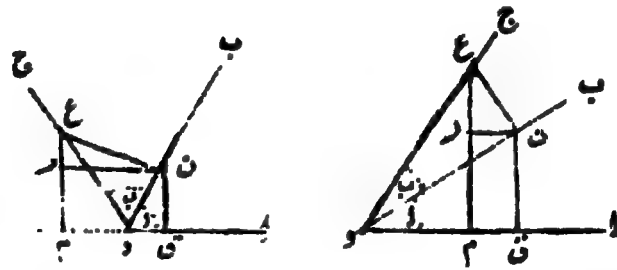
دریافت کرو۔



باب ہفتم وزاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مشلتی نسبتیں

۹- مسئلہ۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} \text{جب } (ا + ب) &= \text{جب } ا + \text{جب } ب + \text{جم } ا + \text{جب } ب \\ \text{جم } (ا + ب) &= \text{جم } ا + \text{جم } ب - \text{جب } ا + \text{جب } ب \end{aligned}$$



ن کرو کہ خط دائر مقام ابتدائی وا سے شروع ہو کر زاویہ اوب
ا) مرسم کرتا ہے اور اس کے بعد ایک اور زاویہ ب وج
ب) مرسم کرتا ہے۔
خط دائر کے آخری مقام وج پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور وا اور

وہاں پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن نکالو
نقطہ ن میں سے ن در ستوازی اوکے اس طرح کھینچو کہ وہ ع م
کو نقطہ لہ پر قطع کرے اور وہاں پر عمود ن ق نکالو۔

زاویہ ر ع ن = ۹۰ - ر ع ن = ر - ر ن و - ر ن و ق
اس لئے جب (ا + ب) = جب ا و ع = $\frac{ع}{ع}$

$$= \frac{م + ر + ع}{ع} = \frac{ق ن}{ع} + \frac{ع}{ع}$$

$$= \frac{ق ن}{ون} \times \frac{ون}{ع} + \frac{ع}{ع} \times \frac{ن ع}{ع}$$

$$= جب اجم ب + جم ر ع ن جب ب$$

$$\therefore جب (ا + ب) = جب اجم ب + جم ر ع ن جب ب$$

$$نیز جم (ا + ب) = جم ا و ع = \frac{ع}{ع} = \frac{ون}{ع} = \frac{ون}{ع} \times \frac{ون}{ع}$$

$$= \frac{ون}{ع} - \frac{ون}{ع} = \frac{ون}{ع} \times \frac{ون}{ع} - \frac{ون}{ع} \times \frac{ون}{ع}$$

$$= جم اجم ب - جب ر ع ن \times جب ب$$

$$\therefore جم (ا + ب) = جم اجم ب - جب ر ع ن جب ب$$

۴۵۔ دفعہ گزشتہ کی اشکال صرت اُس صورت کے لئے کھینچی گئی

ہیں جب دونوں زاویے ا اور ب عاقلے ہوں لیکن یہی ثبوت ہر مقدار

کے زاویوں پر عادی ہوگا اگر اُن سب مقادیر کی علامات کا جو ایسے

حسابات میں شامل ہوں خاص لحاظ رکھا جائے

نتائج مندرجہ بالا کی طرف سے سب زاویوں کے لئے بغیر اور اشکال
نے کے اس طرح ثابت ہو سکتی ہے۔

ا کر د کہ ا اور ب دو عا دے زاوئے ہیں پس بموجب دفعہ ۹۴ مسم
تھے ہیں کہ مسئلہ ا اور ب کے لئے صحیح ہے۔

فرض کر د کہ ا = ۹۰ + ا اس لئے بموجب دفعہ ۹۷

جب ا = جم ا اور جم ا = - جب ا

ب جب (ا + ب) = جب { ۹۰ + (ا + ب) } = جم (ا + ب) موافق دفعہ ۹۷

= جم ا و جم ب - جب ا و جب ب = جب ا و جم ب + جم ا و جب ب

نیز جم (ا + ب) = جم { ۹۰ + (ا + ب) } = - جب (ا + ب)

= - جب ا و جم ب - جم ا و جب ب

= جم ا و جم ب - جب ا و جب ب

ا کر زاویہ ب پر ۹۰ زیادہ کر دئے جائیں تو بھی اسی طرح کا عمل ہو سکتا

ہ، لہذا ثابت ہوا کہ ضوابط دفعہ ۹۴ اُس صورت میں بھی درست رہتے

جب مقدار زاویہ ا یا ب پر ۹۰ زیادہ کر دئے جائیں یعنی اگر ان کے

بھی زاویوں کی قیمتیں ۰ اور ۱۸۰ کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح سے ا کو ۹۰ + ا کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل نمبر ۹۵

مذاقت کو اُس صورت میں بھی قائم کر سکتے ہیں جب ایک یا دونوں

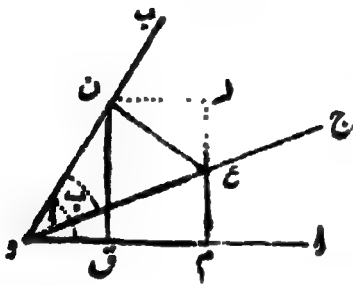
بھی زاویوں کی قیمتیں ۰ اور ۲۷۰ کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح کا عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسائل نمبر ۹۶ بالعموم صحیح ہیں

۱۔ مسئلہ - ثابت کر د کہ

جب (ا - ب) = جب ا و جم ب - جم ا و جب ب

اور جم (ا-ب) = جم اجم ب + جب ا جب ب
 فرض کرو کہ خط دائر خط ابتدائی وا سے شروع ہو کر زاویہ اوب
 (ا-ب) مرسم کرتا ہے اور اس کے بعد سمت مقابل میں حرکت کرنے
 سے ایک زاویہ ب وج پیدا کرتا ہے جس کی مقدار ب ہے اسلئے
 زاویہ اوج = ا-ب



خط دائر کے آخری مقام وج پر
 کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور خطوط وا
 اور وب پر بالترتیب عمود عم
 اور عن ٹھینچو، نقطہ ن سے خط
 وا اور مم پر بالترتیب عمود ن ق
 اور ن ر نکالو

زاویہ ر ع ن = ۹۰ = ر ع ن = ر ن ب = ح ق و ن = ا
 اس لئے

$$\text{جب (ا-ب) = جب اوج} = \frac{\text{مک}}{\text{وج}} = \frac{\text{مر-ع ر}}{\text{وج}}$$

$$= \frac{\text{ق ن}}{\text{وج}} - \frac{\text{ع ر}}{\text{وج}} = \frac{\text{ق ن} \times \text{ون}}{\text{ون} \times \text{وج}} - \frac{\text{ع ر} \times \text{ون}}{\text{ون} \times \text{وج}}$$

$$= \text{جب اجم ب} - \text{جم ر ع ن جب ب}$$

اس لئے جب (ا-ب) = جب اجم ب - جم ر ع ن جب ب

$$\text{نیز جم (ا-ب) = } \frac{\text{وم}}{\text{وج}} = \frac{\text{وق} + \text{ق م}}{\text{وج}} = \frac{\text{وق}}{\text{وج}} + \frac{\text{ق م}}{\text{وج}}$$

$$= \frac{\text{وق} \times \text{ون}}{\text{وج} \times \text{ون}} + \frac{\text{ق م} \times \text{ون}}{\text{وج} \times \text{ون}}$$

$$= \text{جم } \Delta \text{ جم ب} + \text{جب } \Delta \text{ ر جب ب}$$

$$\text{نئے جم } (\Delta - \text{ب}) = \text{جم } \Delta \text{ جم ب} + \text{جب } \Delta \text{ جب ب}$$

۵۔ وضع گردشہ کے ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہو گئے اگر اوپر زیر بحث کی علامات کا مناسب خیال رکھا جائے۔

اگر حادثے زاویوں کی صورت میں نتائج مندرجہ ان لئے جائیں تو بغیر اشکال کھینچنے کے ان کی صداقت بالعموم اس طبع ثابت ہو سکتی ہے

$$\text{فرض کر دو کہ } \Delta = 90^\circ + \text{ب}$$

$$(\text{چونکہ جب } \Delta = \text{جم } \Delta \text{ اور جم } \Delta = - \text{جب } \Delta)$$

$$\text{ب } (\Delta - \text{ب}) = \text{جب } (\Delta + 90^\circ) - \text{ب} = \text{جم } (\Delta - \text{ب}) \quad (\text{وضع } ۷۹)$$

$$= \text{جم } \Delta \text{ جم ب} + \text{جب } \Delta \text{ جب ب}$$

$$= \text{جب } \Delta \text{ جم ب} - \text{جم } \Delta \text{ جب ب}$$

$$\Delta (\Delta - \text{ب}) = \text{جم } (\Delta + 90^\circ) - \text{ب} = - \text{جب } (\Delta - \text{ب}) \quad (\text{وضع } ۷۹)$$

$$= - \text{جب } \Delta \text{ جم ب} + \text{جم } \Delta \text{ جب ب}$$

$$= \text{جم } \Delta \text{ جم ب} + \text{جب } \Delta \text{ جب ب}$$

اسی طرح کا عمل ہو سکتا ہے اگر زاویہ ب پر ۹۰ زیادہ کر دئے جائیں۔

ایسکند ان سب زاویوں کے لئے صحیح ثابت ہوا جو قائلوں سے بڑے نہیں۔

اسی طرح اگر کو ۹۰ + Δ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کو

ن قائلوں سے کم مقدار کے زاویوں کے لئے بھی ثابت کر سکتے ہیں اور

بذل القیاس، لہذا اسی قسم کے عمل سے مسائل کی عام صداقت کسی مقدار

ب زاویوں کی صورت میں ثابت ہو سکتی ہے۔

۹۸۔ مسائل دفعت ۹۴ اور ۹۶ جن کی مدد سے دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں خود ان زاویوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں ان زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کہلاتے ہیں

۹۹۔ مثال ۱۔ جب ۲۵ اور ۲۵ جم ۲۵ کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\text{جب } ۲۵ = \text{جب } (۲۵ + ۲۵)$$

$$= \text{جب } ۲۵ \text{ جم } ۲۵ + \text{جب } ۲۵ \text{ جم } ۲۵$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\text{اور جم } ۲۵ = \text{جم } (۲۵ + ۲۵)$$

$$= \text{جم } ۲۵ \text{ جم } ۲۵ - \text{جب } ۲۵ \text{ جب } ۲۵$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ جب (۱+ب) جب (۱-ب) = جب ۱- جب ۱

$$\text{اور جم } (۱+ب) \text{ جم } (۱-ب) = \text{جم } ۱ - \text{جب } ۱$$

دفعت ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے

$$\text{جب } (۱+ب) \text{ جب } (۱-ب)$$

$$= (\text{جب } ۱ \text{ جم } ۱ + \text{جب } ۱ \text{ جب } ۱) (\text{جب } ۱ \text{ جم } ۱ - \text{جب } ۱ \text{ جب } ۱)$$

$$= \text{جب } ۱ \text{ جم } ۱ - \text{جب } ۱ \text{ جب } ۱$$

$$= \text{جب } ۱ (۱-ب) - (۱-ب) \text{ جب } ۱$$

$$= \text{جب } ۱ - \text{جب } ۱$$

نیز انہی وضاحت کی مدد سے

جم (ا + ب) جم (ا - ب)

= (جم لا جم ب - جب لا جب ب) X جم لا جم ب + جب لا جب ب

= جم لا جم ب - جب لا جب ب

= جم (ا - جب ب) - (ا - جم ب) جب ب

= جم لا - جب ب

مثال ۳ - جب (لا + ما) اور جم (لا + ما) کے ضابطوں کو صحیح مان کر

ان سے جلات جب (لا - ما) اور جم (لا - ما) کے ضابطوں کو مستنبط کرو -

جب لا = جب { (لا - ما) + ما }

= جب (لا - ما) جم لا + جم (لا - ما) جب ما (۱)

اور جم لا = جم { (لا - ما) + ما }

= جم (لا - ما) جم ما - جب (لا - ما) جب ما (۲)

۱. کو جم ما سے اور (۲) کو جب ما سے ضرب دو اور تفریق کرو

تب جب لا جم ما - جم لا جب ما = جب (لا - ما) { جم ما + جب ما }

= جب (لا - ما)

نیز (۱) کو جب ما سے اور (۲) کو جم ما سے ضرب دو اور جمع کر دو حاصل ہوگا -

جب لا جب ما + جم لا جم ما = جم (لا - ما) { جم ما + جب ما }

= جم (لا - ما)

لہذا دونوں ضابطے ثابت ہوئے

یہ دونوں ضابطے زادیوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں کیونکہ

جن ضابطوں سے انکا استنباط ہوا ہے وہ سب زادیوں کے لئے بالعموم

صحیح ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۳

۱۔ اگر جب $ع = \frac{۳}{۵}$ اور جم $ب = \frac{۹}{۱۱}$ تو جب $(ع - ب)$ اور جم $(ع + ب)$ کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پائیش سے ان کی تصدیق کرو۔
 ۲۔ اگر جب $ع = \frac{۲۵}{۵۳}$ اور جب $ب = \frac{۳۳}{۴۵}$ تو جب $(ع - ب)$ اور جب $(ع + ب)$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ اگر جب $ع = \frac{۱۵}{۱۲}$ اور جم $ب = \frac{۱۲}{۱۳}$ تو جب $(ع + ب)$ جم $(ع - ب)$ اور مس $(ع + ب)$ کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پائیش سے انکی تصدیق کرو۔
 ثابت کرو کہ

۴۔ جم $(۱ - ۲۵)$ جم $(۲۵ - ب)$ - جب $(۱ - ۲۵)$ جب $(۲۵ - ب)$ =
 جب $(۱ + ب)$
 ۵۔ جب $(۱ + ۲۵)$ جم $(۲۵ - ب)$ + جم $(۱ + ۲۵)$ جب $(۲۵ - ب)$ =
 جم $(۱ - ب)$

۶۔ $\frac{\text{جب } (۱ - ب)}{\text{جم } ۱ \text{ جم } ب} + \frac{\text{جب } (ب - ج)}{\text{جم } ب \text{ جم } ج} + \frac{\text{جب } (ج - ۱)}{\text{جم } ج \text{ جم } ۱} =$

۷۔ جب $۱۰۵ + ۱۰۵ = \text{جم } ۲۱۰$

۸۔ جب $۵۰ - ۵۰ = \text{جب } ۱۰۰ = \text{جم } ۱۰۵ + ۱۰۵$

۹۔ جم $(ج - ح)$ - جب $ع$ جب $(ج - ع)$ = جم $ج$

۱۰۔ جم $(ع + ب)$ جم $ج$ - جم $(ب + ج)$ جم $ع$ = جب $ب$ جب $(ج - ع)$

- ۱۱۔ جب (۱+ن) ا و جب (۱-ن) ا و جم (ن+۱) ا جم (ن-۱) ا = جم ۲ ا
 ۱۲۔ جب (۱+ن) ا و جب (۲+ن) ا + جم (۱+ن) ا جم (ن+۲) ا = جم ۱ ا
 ۱۰۰۔ دفعات ۹۴ اور ۹۶ سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب}$$

$$\text{جب (ب - ا) = جب ا جم ب - جم ا جب ب}$$

اعمال جمع اور تفریق سے

$$\text{جب (ا + ب) + جب (ب - ا) = ۲ جب ا جم ب (۱)}$$

$$\text{جب (ا + ب) - جب (ب - ا) = ۲ جم ا جب ب (۲)}$$

دفعات مذکورہ بالا سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب}$$

$$\text{اور جم (ب - ا) = جم ا جم ب + جب ا جب ب}$$

اعمال جمع و تفریق سے

$$\text{جم (ا + ب) + جم (ب - ا) = ۲ جم ا جم ب (۳)}$$

$$\text{جم (ب - ا) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب (۴)}$$

اب فرض کرو کہ ا + ب = ج اور ا - ب = د یعنی

$$ا = \frac{ج + د}{۲} \text{ اور } ب = \frac{ج - د}{۲}$$

اوپر کے منابطوں میں ا اور ب کی یہ قیمتیں مندرج کرنے سے
 ارتباطات (۱) تا (۴) صور ذیل میں تحویل ہوتے ہیں -

$$\text{جب ج + جب د = ۲ جب } \frac{ج + د}{۲} \text{ جم } \frac{ج - د}{۲} \text{ (۱)}$$

$$(۲) \text{ جب ج - جب د = ۲ جم } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} \dots$$

$$(۳) \text{ جم ج + جم د = ۲ جم } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} \dots$$

$$(۴) \text{ جم ج - جم د = ۲ جب } \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} \dots$$

(طالب علم کو یاد رکھنا چاہیے کہ (۴) کے بائیں طرف کا دوسرا جزو ضربی

$$\text{جب } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} \text{ ہے نہ کہ جب } \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

۱۵۱۔ ارتباطات (۱) سے (۴) تک نہایت مشہور اور کارآمد ہیں ان کو بڑی احتیاط سے حفظ یاد کر لینا چاہیے، ان کے کثیر الاستعمال ہونے کی وجہ سے ہم ان کا ایک ہندسی ثبوت اس صورت میں دینگے جب زاویے ج اور د دونوں حادے ہوں۔

فرض کرو کہ دوج زاویہ ج سے اور دوازاویہ د سے تعبیر ہوتا ہے، زاویہ ج د د کی تنصیف خط وی سے کہ ایک نقطہ ع خط دی پر مقرر کرو اور ع پر عمود قی ع ر نکالو جو وج اور د کو بالترتیب نقاط قی اور دس پر قطع کرے۔

واپر عمود ع ل، ق م، رن نکالو اور نقطہ ر سے ع ل یا ق م پر عمود رس ت کشینجو جو ان کو بالترتیب نقاط س اور ت پر قطع کرے۔

اب چونکہ زاویہ دوج زاویہ ج - د کے برابر ہے اس لئے دوی اور دی وج میں سے ہر ایک زاویہ $\frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$ کے برابر ہے

اور نیز

$$\frac{د+ج}{۲} = \frac{د-ج}{۲} + د = دوی + ناویہ + اود = زاویہ + اودی$$

چونکہ مثلث ع و ر اور ع و ق ہر طرح سے مساوی ہیں

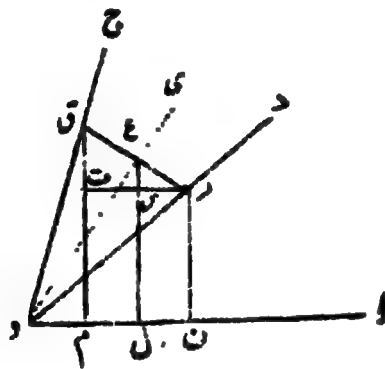
اس لئے وق = ور اور ع ر = ع ق یعنی ر ق = ۲ ر ع

اس لئے ق ت = ۲ ع س اور ر ت = ۲ ز س یعنی م ن = ۲ م ل

اس لئے م ق + ن ر = ت ق + ل س = ۲ س ل + ۲ س ل = ۴ ل س = ۲ ل ع

نیز و م + و ن = و م + م ن = ۲ و م + ۲ م ل = ۲ و ل

$$\frac{م ق + ن ر}{و ر} = \frac{م ق}{و ق} + \frac{ن ر}{و ر} = جب ج + جب د$$



$$\frac{۲ ل ع}{و ر} = \frac{۲ ل ع}{و ع} \times \frac{و ع}{و ر} = ۲ جب ل و ع جم ع و ر$$

$$۲ = جب ج + جب د - جم \frac{د-ج}{۲}$$

$$\text{نیز جب ج - جب د} = \frac{م ق}{و ن} - \frac{ن ر}{و ر}$$

$$\frac{مق - ن - در}{در} = \frac{تق}{در} = \frac{س۲}{در}$$

$$\frac{س۲}{در} = \frac{س۲}{در} = ۲جم س ع ر جب روع$$

$$۲جم \frac{ج+د}{۲} جب \frac{ج-د}{۲}$$

کیونکہ زاویہ س ع ر = ۹۰ - زاویہ س ع و = زاویہ ل و ع

$$\left[\frac{ج+د}{۲} = \right.$$

$$\text{نیز } ۲جم ج + ۲جم د = \frac{وم}{در} + \frac{ون}{در} = \frac{وم+ون}{در}$$

$$۲ول = \frac{ول}{در} = ۲ \times \frac{ول}{در} = \frac{وع}{در}$$

$$۲جم ل و ع جم ع و ر = ۲جم \frac{ج+د}{۲} جب \frac{ج-د}{۲}$$

اور آخر میں جم د - جم ج = $\frac{ون}{در} - \frac{وم}{در} = \frac{ون-وم}{در}$

$$\frac{من}{در} = \frac{س۲}{در} = \frac{س۲}{در} \times \frac{ع ر}{ع ر}$$

$$۲ جب س ع ر \times جب ع و ر$$

$$۲ جب \frac{ج+د}{۲} جب \frac{ج-د}{۲}$$

۱۰۴۔ طالب علم کو خاص ہدایت کی جاتی ہے کہ دفعہ گزشتہ کے ضابطوں سے بخوبی واقف ہو جائے اور ان کے استعمال کی خوب مشق کر لے ان کی کامل واقفیت اس کی آئندہ ترقی

کو نہایت آسان کر دے گی۔

یہ مناجات نہایت کار آمد ہیں کیونکہ ان کی وساطت سے مقادیر کے حاصل جمع اور حاصل تفریق بعض اور مقادیر کے حاصل ضربوں میں تحویل ہو سکتے ہیں اور اغلباً طالب علم کو جبر مقابلہ سے معلوم ہے کہ مقادیر کے حاصل ضرب کو کار تخم کی آمد سے آسانی مختصر صورت میں لائے جا سکتے ہیں

اب ہم ان قوانین کے استعمال کی چند مثالیں دیتے ہیں
مثال ۱۔ جب ۶ طہ + جب ۲ طہ = ۲ جب ۲ طہ + ۴ طہ جم ۲ طہ - ۳ طہ

$$= ۲ جب ۵ طہ جم طہ$$

مثال ۲۔ جم ۳ طہ - جم ۴ طہ = ۲ جب ۲ طہ + ۴ طہ جب ۴ طہ - ۳ طہ

$$= ۲ جب ۵ طہ جب ۲ طہ$$

مثال ۳۔ جب ۲۵ - جب ۱۵ = جم ۲ طہ + ۱۵ جب ۲ طہ - ۱۵ جب ۲ طہ

$$= جم ۲ طہ + ۱۵ جم ۲ طہ - ۱۵ جم ۲ طہ$$

$$= ۲ جم ۲۵ جب ۲۵ - ۲ جم ۱۵ جب ۱۵ = ۳۰$$

$$= \frac{۳۲}{۳۲} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

[ان مناجاتوں کے استعمال سے تسبیح عمل کی = ایک چھوٹی سی مثال ہے اگر ہم جب ۲۵ - جب ۱۵ = جم ۲ طہ + ۱۵ اور جم ۱۵ کو لوکار تہی جدولوں سے نکالیں اور اس کے بعد ایک طویل کسر اعشاریہ کو دوسری پر تقسیم کریں تو ظاہر ہے کہ یہ نہایت پریشان کن اور طولانی عمل ہو گا]

مثال ۴- جملہ $(\text{جم } ۳ ط - \text{جب } ۳ ط)$ $(\text{جب } ۸ ط + \text{جب } ۲ ط)$ کو مختصر کر دو۔

ضابطہ دفعہ ۱۰۰ کی مد سے

$$\begin{aligned} & \text{جب } ۳ ط + ط - ط - ط \text{ جب } ۳ ط - ط \times ۲ \text{ جب } ۲ ط + ط - ط - ط \text{ جم } ۲ ط - ط - ط \\ & \text{جملہ } ۲ \text{ جم } ۵ ط + ط - ط - ط \text{ جب } ۵ ط - ط - ط \times ۲ \text{ جب } ۲ ط + ط - ط - ط \text{ جب } ۲ ط - ط - ط \\ & = \frac{۲ \times \text{جب } ۲ ط - ط - ط \times \text{جب } ۵ ط - ط - ط}{۲ \times \text{جم } ۳ ط - ط - ط \times \text{جب } ۵ ط - ط - ط} = ۱ \end{aligned}$$

امثلہ نمبری ۱۴

ثابت کرو کہ

$$۱- \frac{\text{جب } ۴ ط - \text{جب } ۵ ط}{\text{جم } ۴ ط + \text{جم } ۵ ط} = \text{مس } ط$$

$$۲- \frac{\text{جم } ۴ ط - \text{جم } ۳ ط}{\text{جب } ۴ ط + \text{جب } ۳ ط} = -\text{مس } ط$$

$$۳- \frac{\text{جب } ۱ ط + \text{جب } ۳ ط}{\text{جم } ۱ ط + \text{جم } ۳ ط} = \text{مس } ۱ ط$$

$$۴- \frac{\text{جب } ۴ ط - \text{جب } ۱ ط}{\text{جب } ۱ ط - \text{جب } ۲ ط} = \text{جم } ۱ ط - ۵ ط$$

$$۵- \frac{\text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۲ ط}{\text{جم } ۲ ط - \text{جم } ۲ ط} = \text{مس } (۱ ط + ب) = \text{مس } (۱ ط - ب)$$

$$۶- \frac{\text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۲ ط}{\text{جب } ۲ ط - \text{جب } ۲ ط} = \frac{\text{مس } (۱ ط + ب)}{\text{مس } (۱ ط - ب)}$$

- ۷- $\frac{1}{2} \text{ جم} = \frac{\text{جب ۱} + \text{جب ۲}}{\text{جم ۱} - \text{جم ۲}}$
- ۸- $\text{مس ۱} = \frac{\text{جب ۵} - \text{جب ۳}}{\text{جم ۱۵} + \text{جم ۱۲}}$
- ۹- $\text{مس (۱-ب)} = \frac{\text{جم ۲ب} - \text{جم ۱۲}}{\text{جب ۲ب} + \text{جب ۱۲}}$
- ۱۰- $\text{جم (۱+ب)} + \text{جب (۱-ب)} = ۲ \text{ جب (۱+۲۵)} + \text{جم (۲۵+ب)}$
- ۱۱- $\frac{\text{جم ۱۲-جم ۱}}{\text{جب ۱-جب ۱۲}} + \frac{\text{جم ۱۲-جم ۱}}{\text{جب ۱۲-جب ۱}} = \frac{\text{جم ۱۲-جم ۱}}{\text{جم ۱۲-جم ۱}}$
- ۱۲- $\text{مس (۱+ب)} = \frac{\text{جب (۱۲-۲ب)} + \text{جب (۲-۱۲)}}{\text{جم (۱۲-۲ب)} + \text{جم (۲-۱۲)}}$
- ۱۳- $\text{مس ۵ط} + \text{مس ۳ط} = \frac{\text{جم ۲ط} + \text{جم ۲ط}}{\text{مس ۵ط} - \text{مس ۳ط}}$
- ۱۴- $\text{جم ۳ط} + ۲ \text{ جم ۵ط} + \text{جم ۷ط} = \frac{\text{جم ۲ط} - \text{جم ۲ط}}{\text{جم ۵ط} + \text{جم ۳ط}}$
- ۱۵- $\text{مس ۱۲} = \frac{\text{جب ۱} + \text{جب ۱۳} + \text{جب ۱۵} + \text{جب ۱۷}}{\text{جم ۱} + \text{جم ۱۳} + \text{جم ۱۵} + \text{جم ۱۷}}$
- ۱۶- $\text{مس ط} = \frac{\text{جب (ط+ذ)} - ۲ \text{ جب ط} + \text{جب (ط-ذ)}}{\text{جم (ط+ذ)} - ۲ \text{ جم ط} + \text{جم (ط-ذ)}}$
- ۱۷- $\frac{\text{جب ۱۳}}{\text{جب ۱۵}} = \frac{\text{جب ۱} + ۲ \text{ جب ۱۳} + \text{جب ۱۵}}{\text{جب ۱۷} + ۲ \text{ جب ۱۵} + \text{جب ۱۷}}$

$$-۱۸ \quad \frac{\text{جب } (ا-ج) + ۲ \text{ جب } ا + \text{جب } (ا+ج)}{\text{جب } (ب-ج) + ۲ \text{ جب } ب + \text{جب } (ب+ج)} = \frac{\text{جب } ا}{\text{جب } ب}$$

$$-۱۹ \quad \frac{\text{جب } ا - \text{جب } ۵ + \text{جب } ۹ - \text{جب } ۱۳}{\text{جم } ا - \text{جم } ۵ - \text{جم } ۹ + \text{جم } ۱۳}} = \text{مم } ۱۲$$

$$-۲۰ \quad \frac{\text{جب } ا + \text{جب } ب}{\text{جب } ا - \text{جب } ب} = \text{مس } \frac{\text{ب} + \text{ا}}{۲} \text{ مم } \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲}$$

$$-۲۱ \quad \frac{\text{جم } ا + \text{جم } ب}{\text{جم } ب - \text{جم } ا} = \text{مم } \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲} \text{ مم } \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲}$$

$$-۲۲ \quad \frac{\text{جب } ا + \text{جب } ب}{\text{جم } ا + \text{جم } ب} = \text{مس } \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲}$$

$$-۲۳ \quad \frac{\text{جب } ا - \text{جب } ب}{\text{جم } ب - \text{جم } ا} = \text{مم } \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲}$$

$$-۲۴ \quad \frac{\text{جم } (ا+ب+ج) + \text{جم } (ا+ب+ج) + \text{جم } (ا-ب+ج) + \text{جم } (ا+ب-ج)}{\text{جب } (ا+ب+ج) + \text{جب } (ا+ب+ج) + \text{جب } (ا-ب+ج) + \text{جب } (ا+ب-ج)}} = \text{مم } ب$$

$$-۲۵ \quad \text{جم } ۱۳ + \text{جم } ۵ + \text{جم } ۷ + \text{جم } ۱۵ = \text{جم } ۲ + \text{جم } ۵ + \text{جم } ۹ + \text{جم } ۱۶}$$

$$-۲۶ \quad \text{جم } (ا+ب+ج) + \text{جم } (ا-ب+ج) + \text{جم } (ا+ب-ج) + \text{جم } (ا+ب+ج)}$$

$$= ۲ \text{ جم } ا + \text{جم } ب + \text{جم } ج$$

$$-۲۷ \quad \text{جب } ۵۰ - \text{جب } ۲۰ + \text{جب } ۱۰ =$$

$$-۲۸ \quad \text{جب } ۱۰ + \text{جب } ۲۰ + \text{جب } ۴۰ + \text{جب } ۵۰ = \text{جب } ۲۰ + \text{جب } ۸۰$$

$$-۲۹ \quad \text{جب } ۱ + \text{جب } ۲ + \text{جب } ۴ + \text{جب } ۸ = \text{جم } ۴ \text{ جم } \frac{۳}{۲} \text{ جم } \frac{۳}{۲} \text{ جب } ۳$$

مختصر کرد

$$۳۰ - \text{جم} \{ ط + (ن - \frac{۳}{۴}) \} - \text{جم} \{ ط + (ن + \frac{۳}{۴}) \} \text{ذ} \{$$

$$۳۱ - \text{جب} \{ ط + (ن - \frac{۱}{۴}) \} + \text{جب} \{ ط + (ن + \frac{۱}{۴}) \} \text{ذ} \{$$

۱۰۳ - دفعہ ۱۰۰ کے ضوابط (۱)، (۲)، (۳)، (۴) نہایت کارآمد ہیں ان کو شکل ذیل میں یاد رکھنا چاہیئے۔

$$۲ \text{ جب } \text{اجم ب} = \text{جب} (ا + ب) + \text{جب} (ا - ب) \dots (۱)$$

$$۲ \text{ جم } \text{اجب ب} = \text{جب} (ا + ب) - \text{جب} (ا - ب) \dots (۲)$$

$$۲ \text{ جم } \text{اجم ب} = \text{جم} (ا + ب) + \text{جم} (ا - ب) \dots (۳)$$

$$۲ \text{ جب } \text{اجب ب} = \text{جم} (ا - ب) - \text{جم} (ا + ب) \dots (۴)$$

ان کو ہم (دفعہ ۱۰۰) کے ضابطوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) کا عکس خیال کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱ - جب } ۱ ط \text{ جم } ط = \text{جب } ۳ ط + \text{جب } ۲ ط$$

$$\text{مثال ۲ - جب } ۵ ط \text{ جب } ۳ ط = \text{جم } ۲ ط - \text{جم } ۸ ط$$

$$\text{مثال ۳ - جب } ۱۱ ط \text{ جم } ۲ ط = \text{جم } ۱۳ ط + \text{جم } ۹ ط$$

$$\text{مثال ۴ - جب } ۸ ط \text{ جم } ط - \text{جب } ۶ ط \text{ جم } ۳ ط \text{ کو مختصر کرو}$$

$$\text{جم } ۲ ط \text{ جم } ط - \text{جب } ۳ ط \text{ جب } ۴ ط$$

مندرجہ بالا ضابطوں کی مدد سے

$$\frac{\frac{1}{4} [\text{جب ۹ ط + جب ۷ ط}] - \frac{1}{4} [\text{جب ۹ ط + جب ۳ ط}]}{\frac{1}{4} [\text{جم ۳ ط + جم ۲ ط}] - \frac{1}{4} [\text{جم ۲ ط - جم ۷ ط}]} = \text{مرد مجوزہ}$$

$$\frac{\text{جب ۷ ط - جب ۳ ط}}{\text{جم ۳ ط + جم ۷ ط}} =$$

$$\frac{\text{جم ۲ ط جب ۲ ط}}{\text{جم ۲ ط جم ۲ ط}} = \text{ضوابط دفعہ ۱۰۰ کی مد سے}$$

$$= \text{س ۲ ط}$$

[اس مثال میں سب سے پہلے ہم نے اس دفعہ کے ضابطوں کو استعمال کیا، اس کے بعد مزید اختصار کی خاطر ان کی عکس صورتوں (دفعہ ۱۰۰) سے مدلی۔ طالب علم کو یہ ترکیب یاد رکھنی چاہئے جملوں کے اختصار میں یہ اکثر کام آتی ہے]

امثلہ نمبری ۱۵

منفصلہ ذیل کو حاصل میں یا حاصل تفریق کی صورت میں بیان کرو

$$۱- \text{جب ۵ ط جب ۷ ط} - ۲- \text{جم ۷ ط جب ۵ ط}$$

$$۳- \text{جم ۱۱ ط جم ۳ ط} - ۴- \text{جب ۲ ط جب ۵ ط جب ۹ ط}$$

ثابت کر دو

$$۵- \text{جب ۲ ط جب ۷ ط + جب ۳ ط جب ۱۱ ط} = \text{جب ۲ ط جب ۵ ط}$$

$$۶- \text{جم ۲ ط جم ۷ ط - جم ۳ ط جم ۱۱ ط} = \text{جب ۵ ط جب ۹ ط}$$

$$۷- \text{جب ۱۱ ط (ب + ۲) - جب ۲ ط (ب + ۵) = جب ۵ ط (ب - ۱) جب ۹ ط (ب - ۱)}$$

$$(ج۱۳ + ج۱) جب۱ + (ج۱۳ - ج۱) جم۱ = ۰$$

$$ج۲ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) - ج۲ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) = \frac{جب۱}{جب۲}$$

$$جب۱ واجب۱ + جب۲ واجب۲ + جب۳ واجب۳ + جب۴ واجب۴ = مس۱$$

$$جم۱ + جم۲ + جم۳ + جم۴ = مم۱ + مم۲ + مم۳ + مم۴$$

$$جم۱ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) + جم۲ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) + جم۳ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) + جم۴ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) = ۰$$

$$جب۱ (ج۱ + ج) (ج۱ - ج) = \frac{۱}{۲} جم۱$$

$$سم۱ (ج۱ + ج) (ج۱ - ج) = (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) ۲$$

$$جب۱ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) + جب۲ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) + جب۳ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) + جب۴ (ج۱ - ج) (ج۱ - ج) = ۰$$

$$جم۱ \frac{۱}{۱۳} + جم۲ \frac{۲}{۱۳} + جم۳ \frac{۳}{۱۳} + جم۴ \frac{۴}{۱۳} = ۰$$

$$۱ - ثابت کرو کہ مس (ج۱ + ج) = مس۱ + مس۲$$

$$ن (ج۱ - ج) = \frac{مس۱ - مس۲}{۱ + مس۱ + مس۲}$$

۲ دفعہ ۹۳ اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

$$(ج۱ + ج) = \frac{جب۱ (ج۱ + ج) + جب۲ (ج۱ + ج) + جب۳ (ج۱ + ج) + جب۴ (ج۱ + ج)}{جم۱ (ج۱ + ج) + جم۲ (ج۱ + ج) + جم۳ (ج۱ + ج) + جم۴ (ج۱ + ج)}$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو جم و جب پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{جم و جب} + \text{جم و جب}}{\text{جم و جب}} =$$

$$۱ - \frac{\text{جم و جب} \times \text{جم و جب}}{\text{جم و جب}}$$

$$\frac{\text{مس و مس} + \text{مس و مس}}{\text{مس و مس}} = \text{مس (و ب)}$$

نیز بموجب دفعہ ۹۶

$$\frac{\text{جم (و ب)}}{\text{جم (و ب)}} = \text{مس (و ب)}$$

$$\frac{\text{جم و جب} - \text{جم و جب}}{\text{جم و جب} + \text{جم و جب}} =$$

$$\frac{\text{جم و جب} - \text{جم و جب}}{\text{جم و جب}}$$

$$\frac{\text{جم و جب} + \text{جم و جب} \times \text{جم و جب}}{\text{جم و جب}} =$$

$$\frac{\text{مس و مس} - \text{مس و مس}}{\text{مس و مس} + \text{مس و مس}} = \text{مس (و ب)}$$

۱۰۵ - دفعہ گذشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت افکال دفعہ ۹۴ اور ۹۶ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

(۱) شکل دفعہ ۹۴ میں

$$\begin{aligned} \text{مس (ا+ب)} &= \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \frac{\text{قن} + \text{رع}}{\text{وق} - \text{رن}} \\ \frac{\text{قن} + \text{رع}}{\text{وق} - \text{رن}} &= \frac{\text{مس ا} + \frac{\text{ع}}{\text{وق}}}{1 - \frac{\text{رن}}{\text{وق}}} \end{aligned}$$

چونکہ زاوئے ع ن اور ق ون برابر ہیں اس لئے مثلث ع ن ر ق ون متشابه ہیں

$$\text{س} = \frac{\text{ع}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{وق}}{\text{ون}}$$

$$\text{در اعلیٰ} \quad \frac{\text{ع}}{\text{وق}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ون}} = \text{مس ب}$$

$$\text{س لئے} \quad \text{مس (ا+ب)} = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{ا-مس ع ن مس ب}}$$

$$\frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{ا-مس ع ن مس ب}} =$$

(۲) شکل دفعہ ۹۶ میں

$$\text{مس (ا-ب)} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \frac{\text{قن} - \text{ع ر}}{\text{وق} + \text{ن ر}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{قن} - \text{ع ر}}{\text{وق} + \text{ن ر}} &= \frac{\text{مس ا} - \frac{\text{ع ر}}{\text{وق}}}{1 + \frac{\text{ن ر}}{\text{وق}}} \\ \frac{\text{مس ا} - \frac{\text{ع ر}}{\text{وق}}}{1 + \frac{\text{ن ر}}{\text{وق}}} &= \end{aligned}$$

اب چونکہ زاوئے یقین اور نواق مساوی ہیں

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{عقار}}{\text{دقی}} = \frac{\text{دقی}}{\text{دقی}}$$

$$\text{اور اس لئے} \quad \frac{\text{عقار}}{\text{دقی}} = \frac{\text{عقار}}{\text{دقی}} = \text{مسب}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{مس} (ا - ب) = \frac{\text{مس} ا - \text{مس} ب}{ا + \text{مس} یقین مسب}$$

$$= \frac{\text{مس} ا - \text{مس} ب}{ا + \text{مس} ا مسب}$$

۱۰۹۔ مندرجہ بالا مضابطوں کی چند خاص صورتیں اس طرح حاصل ہو سکتی ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ ب} = ۲۵ \text{ تب} \quad \frac{\text{مس} ا + ۱}{ا - \text{مس} ا} = \frac{\text{مس} ا + ۱}{ا - \text{مس} ا} = \text{مس} (۲۵ + ۱)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{مس} ا - ۱}{ا + \text{مس} ا} = \text{مس} (۲۵ - ۱)$$

اسی طرح موافق دفعہ ۱۰۴ عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{مم} ا + \text{مم} ب - ۱}{\text{مم} ا + \text{مم} ب} = \text{مم} (ا + ب)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{مم} ا + \text{مم} ب + ۱}{\text{مم} ب - \text{مم} ا} = \text{مم} (ا - ب)$$

$$۱۰۷۔ مثال ۱۔ \text{مس} ۵ = \text{مس} (۲۵ + ۳۰)$$

$$\frac{\text{مس } ۲۵ + \text{مس } ۳۰}{\text{مس } ۲۵ - \text{مس } ۳۰} =$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} =$$

$$\frac{\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} =$$

$$3243205 \dots = 1563205 \dots + 2 = \sqrt{2} + 2 =$$

مثال ۲- مس ۱۵ = مس (۳۰ - ۲۵)

$$\frac{\text{مس } ۳۰ - \text{مس } ۲۵}{\text{مس } ۳۰ + \text{مس } ۲۵} =$$

$$\frac{(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} =$$

$$1563205 \dots - 2 = \sqrt{2} - 2 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} =$$

$$3243205 \dots =$$

۱۶ مشکل نمبری

۱- اگر مس ۱ = $\frac{1}{2}$ اور مس ب = $\frac{1}{3}$ تو مس (۲ + ب) اور

مس (۲ - ب) کی قیمتیں دریافت کرو

نیز ترکیبی مل اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو

۲- اگر مس ۱ = $\frac{۳۴}{۳۴-۳}$ اور مس ب = $\frac{۳۴}{۳۴+۳}$ تو ثابت کرو کہ

مس (۱-ب) = ۳۴۵

۳- اگر مس ۱ = $\frac{ن}{۱+ن}$ اور مس ب = $\frac{۱}{۱+ن}$ تو مس (۱+ب)

دریافت کرو

۴- اگر مس ع = $\frac{۵}{۴}$ اور مس ب = $\frac{۱}{۱۱}$ تو ثابت کرو کہ ع + ب = $\frac{۱۱}{۱۲}$
عمل ترتیبی اور صحیح پائیش سے اس کی تصدیق کرو۔
ثابت کرو کہ

۵- مس $(\frac{۱۱}{۱۲} + ط)$ × مس $(\frac{۱۱}{۱۲} + ط) = ۱$

۶- مم $(\frac{۱۱}{۱۲} + ط)$ مم $(\frac{۱۱}{۱۲} - ط) = ۱$

۷- ۱ + مس ۱ مس $\frac{۱}{۴} =$ مس ۱ مم $\frac{۱}{۴} - ۱ =$ قط ۱

۱۰۸- اس باب کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے
اس قسم کی مثالیں بھی حل ہو سکتی ہیں کہ ہم ان سب زاویوں
کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کریں جن کی جیب یا جیب انعام
یا محاس معلوم ہو دفعات ۸۸ تا ۹۰ میں اس کے متعلق بحث
ہو چکی ہے۔

ان سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی جیب معلوم رکھتے
ہوں ایک قیمت عامہ دریافت کرو

فرض کرو کہ ع کوئی زاویہ ہے جو جیب معلوم رکھتا ہے
اور ط ایک اور زاویہ ہے جس کی جیب وہی ہے جو ع کی ہے

پس ہمیں طہ کی ایک ایسی عام سے عام قیمت معلوم کرنی ہے جو شرائط مساوات جب طہ = جب عہ یعنی جب طہ - جب عہ = ۰ کو پورا کرے یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$۲ \text{ جم } \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اور اس لئے اس کی شرائط مساوات ذیل سے پوری ہونگی

$$\text{جم } \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = ۰ \text{ اور جب } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اس لئے لازماً $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے

$$\text{اور } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = \pi \text{ کے کسی ضعف کے}$$

یعنی طہ = عہ + π کا کوئی طاق ضعف

اور طہ = عہ + π کا کوئی جفت ضعف

یعنی لازماً طہ = (۱ - π) عہ + π جہاں π کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

کیونکہ جب π طاق ہو تو جملہ عامہ سے جملہ (۱) حاصل ہوتا ہے

اور جب π جفت ہو تو جملہ (۲) حاصل ہوتا ہے

۱۰۹۔ ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب التمام

ہو ایک قیمت عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

$$\text{جم طہ} = \text{جم عہ}$$

یعنی $\text{جم} - \text{ط} = \text{ع} = ۰$
 یعنی $۲ \text{ جب } \text{ط} + \text{ع} = \text{جب } \text{ط} - \text{ع} = ۰$ کو حل کرنا مطلوب ہے
 شرائط مساوات مذکورہ
 $\text{جب } \text{ط} + \text{ع} = ۰$ سے اور $\text{جب } \text{ط} - \text{ع} = ۰$ سے پوری ہوتی ہیں
 اس سے ظاہر ہے کہ $\text{ط} + \text{ع} = ۱۲$ کے کسی ضعیف کے
 اور $\text{ط} - \text{ع} = ۱۲$ کے کسی ضعیف کے
 یعنی $\text{ط} = -\text{ع} + ۱۲$ کا کوئی ضعیف
 اور $\text{ط} = \text{ع} + ۱۲$ کا کوئی ضعیف
 دونوں نظام ان قیمتوں کے جملہ $\text{ط} = ۲$ ن $\text{ع} \pm$ میں شامل
 ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے
 ۱۱۰۔ ان سب زادیوں کے لئے جو ایک ہی ماس معلوم
 رکھتے ہوں ایک جملہ عامہ دریافت کرد۔

اس صورت میں مساوات

$$\text{مس} - \text{ط} = \text{مس} - \text{ع} = ۰$$

یعنی $\text{جب } \text{ط} - \text{جم} = \text{جب } \text{ط} - \text{ع} = ۰$
 یعنی $\text{جب } (\text{ط} - \text{ع}) = ۰$

کو حل کرنا مطلوب ہے۔

$$\therefore \text{ط} - \text{ع} = ۱۲ \text{ کے کسی ضعیف کے}$$

$$= \text{ن} \text{ جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد}$$

۱۔ ملے مساوات کا عام سے عام حل طہ = ن + ط ہے

امثلہ نمبری ۱۴ (۱)

۱۔ دو عاڈے زاوئے بناؤ جن کے ماس $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہوں اور پیمائش سے تصدیق کرو کہ ان کا مجموعہ ۴۵ ہے

۲۔ دو عاڈے زاویوں کے ماس بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کا ماس $\frac{1}{2}$ ہے

۳۔ ایک عاڈے زاوئے کی جیب ۶ ہے اور ایک اور زاوئے کی جیب اتمام ۵ ہے، عمل ترسیمی سے 'نیز حساب لگانے سے ثابت کرو کہ ان کے حاصل تفریق کی جیب قریب قریب ۳۹ ہے

۴۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب اتمام ۴ ہو اور حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ایک ایسے زاوئے کی جیب اور جیب اتمام جو

زاویہ مذکورہ سے بقدر ۴۵ کے زیادہ ہو تقریباً ۳۹ اور - ۳۶۵ ہیں

۵۔ ایک زاویہ عاڈہ بناؤ جس کا ماس ۷ ہو اور ایک اور زاویہ عاڈہ

بناؤ جس کی جیب ۷ ہو، حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ

ان کے تفاوت کی جیب قریب قریب ۶۱ ہے۔

باب ہشتم

اصناعی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں

۱۱۱۔ زاویہ $\angle ۲$ کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ $\angle ۱$ کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

اگر دفعہ ۹۴ کے ضابطوں میں ہم فرض کریں کہ $\angle ۱ = ۱$ تو حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} \text{جب } \angle ۲ = ۱ &= \text{جب } \angle ۱ + \text{جب } \angle ۱ = ۲ \text{ جب } \angle ۱ \text{ جم } \angle ۱ \\ \text{جم } \angle ۲ &= \text{جم } \angle ۱ + \text{جب } \angle ۱ = \text{جم } \angle ۱ - \text{جب } \angle ۱ \\ &= (۱ - \text{جب } \angle ۱) - \text{جب } \angle ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب } \angle ۱ \end{aligned}$$

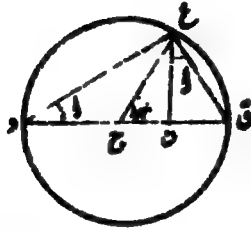
$$\text{اور نیز } = \text{جم } \angle ۱ - (۱ - \text{جم } \angle ۱) = ۲ \text{ جم } \angle ۱ - ۱$$

$$\text{اور } \frac{\text{مس } \angle ۲}{\text{مس } \angle ۱} = \frac{\text{مس } \angle ۱ + \text{مس } \angle ۱}{\text{مس } \angle ۱} = ۲$$

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطے $\angle ۱$ اور $\angle ۲$ کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہیں اس لئے جو صورتیں ان سے مستنبط ہوتی ہیں وہ بھی زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اور بالخصوص مندرجہ بالا ضابطے $\angle ۱$ کی تمام قیمتوں کے لئے

درست ہیں۔

۱۱۲۔ جب زاویہ ۱ قائمہ سے کم ہو تو وضعہ گزشتہ کے مطابق
کا ہندسی ثبوت اس طرح بلا واسطہ حاصل ہو سکتا ہے۔



فرض کرو کہ ق ج ع زاویہ ۱۲ کے برابر ہے، مرکز ج اور نصف قطر
ج ع پر ایک دائرہ بناؤ اور فرض کرو کہ ق ج محدودہ دائرہ مذکورہ کو
نقطہ و پر ملتا ہے، وع اور ع ق کو ملاؤ اور وق پر عمود ع ن
نکالو۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۲۰

$$\text{زاویہ } \angle \text{ق ج ع} = \angle \text{ق و ع} = ۱۲$$

$$\text{اور زاویہ } \angle \text{ن و ع} = \angle \text{ن و ق} = ۱$$

$$\text{اس لئے جب } ۱۲ = \frac{\text{ن ع}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{ن ع}^۲}{\text{ج ق}^۲} = ۲ \frac{\text{ن ع}}{\text{وق}}$$

$$۲ = \frac{\text{ن ع}}{\text{وق}} \times \frac{\text{ن ع}}{\text{وق}}$$

۲ = جب ن و ع جمع وق چونکہ وع ق زاویہ قائمہ

۲ = حب و عمر

نیز $\frac{۲۰۰}{۲۰۰} = \frac{۱۰۰}{۱۰۰} = ۱۰۰$

$$\frac{(وج + ج ن) - (وج - ج ن)}{وق} = \frac{ج ن}{وق} =$$

$$\frac{\text{نق}}{\text{عق}} \times \frac{\text{نق}}{\text{عق}} - \frac{\text{ون}}{\text{عق}} \times \frac{\text{ون}}{\text{عق}} = \frac{\text{ون} - \text{نق}}{\text{عق}}$$

= جملہ - جبا

$$\frac{\text{۲۰۰۰ روپے}}{\text{۱۰۰ روپے}} = \frac{\text{۲۰ روپے}}{\text{۱ روپے}} = ۲۰$$

عن
ون

$$\frac{2 \text{ مس ۱}}{1 \text{ مس ۱}} =$$

مثال - جب ۵۱ اور جم ۵۱ کی قیمتیں دریافت کرو

فرض کہ وہ زاویہ ۵۲ برابر ۳۰ کے ہے یعنی $1 = 15$

مینیر فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ ج ع برابر ۲۰ کے ہے اسلئے حاصل ہوگا

ج ن = ۲ رجم ۳۰ = ۳۴

اور $2 = 2 \text{ ریب } 30 = 2$

اس لئے $ون = وج + جن = ر(۳۲ + ۲)$
 اور $نق = جق - جن = ر(۳۲ - ۲)$
 \therefore $وع^۲ = ون \times وق = ر(۳۲ + ۲) \times ۴ر$ (اقلیرام ۴ ش ۸)
 یعنی $وع = ۲ر(۱ + ۳۲)$
 اور $عق^۲ = قن \times قو = ر(۳۲ - ۲) \times ۴ر$
 یعنی $عق = ۲ر(۱ - ۳۲)$
 اس لئے جب $۱۵ = \frac{عق}{وق} = \frac{۲ر(۱ - ۳۲)}{۴ر} = \frac{۱ - ۳۲}{۲}$
 اور $جم ۱۵ = \frac{وع}{وق} = \frac{۲ر(۱ + ۳۲)}{۴ر} = \frac{۱ + ۳۲}{۲}$

۱۱۳ - زاویہ ۳۱ کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ۱ کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۹۴ میں ب کی جگہ ۱۲ رکھنے سے حاصل ہوگا
 جب ۱۳ = جب (۱ + ۱۲) = جب ۱ جم ۱۲ + جم ۱ جب ۱۲
 = جب ۱ (۱ - ۲ جب ۱) + جم ۱۲ × ۲ جب ۱ جم ۱۲ جب ۱۱
 = جب ۱ (۱ - ۲ جب ۱) + ۲ جب ۱ (۱ - جب ۱)

اس لئے جب ۱۳ = ۳ جب ۱ - ۴ جب ۱ (۱)

اسی طرح سے جم ۱۳ = جم (۱ + ۱۲) = جم ۱ جم ۱۲ - جب ۱ جب ۱۲
 = جم ۱ (۲ جم ۱ - ۱) - جب ۱ × ۲ جب ۱ جم ۱
 = جم ۱ (۲ جم ۱ - ۱) - ۲ جم ۱ (۱ - جم ۱)

اس لئے حجم ۱۳ = حجم ۱۲ - حجم ۱ (۲)

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}} = \frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}} = \frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}}$$

$$\frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}} = \frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}}$$

$$\frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}} = \frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}} = \frac{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}}{\text{مس ۱} - \text{مس ۲}}$$

[طالب علم کو شاید مندرجہ بالا مضابطوں (۱) اور (۲) کو یاد رکھنے میں وقت ہو، ان صورتوں میں کچھ مشابہت ہے مگر ترتیب علامات میں اختلاف اگر کسی قسم کا شک ہو تو طالب علم کو ان مضابطوں کی خاص صورتوں کے تصدیق کر لینی چاہیئے، مثلاً صورت (۱) میں فرض کر دو کہ ۱ = ۳۰ اور (۲) میں ۱ = ۱۰]

۱۱۴ - دفعہ گزشتہ کے موافق عمل کرنے سے طہ کے کم اعلیٰ صنف کی مثلثی نسبتیں طہ کی نسبتوں کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں مگر یہ طریقہ طولانی اور پریشان کن ہو گا آگے چل کر آئندہ باب میں اس سے اچھی ترکیبیں دی جائیں گی۔

تمثیلاً فرض کرو کہ حجم ۵ طہ کو حجم طہ کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے
 حجم ۵ طہ = حجم (۳ طہ + ۲ طہ)

$$= \text{حجم } ۳ \text{ طہ حجم } ۲ \text{ طہ} - \text{جب } ۳ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ}$$

$$= (۴ \text{ حجم } ۳ \text{ طہ} - ۳ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ}) (۲ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} - ۱)$$

$$- (۳ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} - ۲ \text{ حجم } ۱ \text{ طہ}) \times ۲ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ حجم } ۱ \text{ طہ}$$

$$= (۸ \text{ حجم } ۳ \text{ طہ} - ۱۰ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} + ۳ \text{ حجم } ۱ \text{ طہ})$$

$$- ۲ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} \times \text{جب } ۳ \text{ طہ} (۳ - ۲ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ})$$

$$= (۸ \text{ حجم } ۳ \text{ طہ} - ۱۰ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} + ۳ \text{ حجم } ۱ \text{ طہ})$$

$$- ۲ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} (۱ - \text{حجم } ۲ \text{ طہ}) (۴ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} - ۱)$$

$$= (۸ \text{ حجم } ۳ \text{ طہ} - ۱۰ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} + ۳ \text{ حجم } ۱ \text{ طہ})$$

$$- ۲ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} (۵ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} - ۴ \text{ حجم } ۱ \text{ طہ} - ۱)$$

$$= ۱۶ \text{ حجم } ۳ \text{ طہ} - ۲۰ \text{ حجم } ۲ \text{ طہ} + ۵ \text{ حجم } ۱ \text{ طہ}$$

امثلہ نمبری ۱۷

۱- جب ۲ طہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

$$(۱) \text{ حجم } ۳ = \frac{۳}{۵} \text{ جب } ۲ = \frac{۱۲}{۱۳} \text{ اور } (۳) \text{ مس } ۵ = \frac{۱۶}{۱۳}$$

۲- حجم ۲ طہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

$$(۱) \text{ حجم } ۳ = \frac{۱۵}{۱۲} \text{ جب } ۲ = \frac{۲}{۵} \text{ اور } (۳) \text{ مس } ۵ = \frac{۵}{۱۲}$$

ہر ایک صورت میں ترسیم اور صحیح پائیش سے تصدیق کرو

۳- اگر مس طہ = $\frac{۱}{۵}$ تو اجم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ کی قیمت دریافت کرو
 ثابت کرو کہ

- ۳- $\frac{\text{جب ۱۲}}{\text{جم ۱۲} + ۱} = \text{مس ۱}$ - ۵ $\frac{\text{جب ۱۲}}{\text{جم ۱۲} - ۱} = \text{مم ۱}$
- ۴- $\frac{\text{جم ۱۲} - ۱}{\text{جم ۱۲} + ۱} = \text{مس ۱}$ - ۷ $\text{مس ۱} + \text{مم ۱} = ۲ \text{ قم ۱۲}$
- ۸- $\text{مس ۱} - \text{مم ۱} = ۲ \text{ مم ۱۲}$ - ۹ $\text{قم ۱۲} + \text{مم ۱۲} = \text{مم ۱}$
- ۱۰- $\frac{\text{جم ۱} + \text{جم ۱} - \text{جم ۱} + \text{جم ۱}}{\text{جم ۱} + \text{جم ۱} - \text{جم ۱} + \text{جم ۱}} = \frac{\text{مس ۱} + \text{مس ۱}}{\text{مم ۱} + \text{مم ۱}}$
- ۱۱- $\frac{\text{جم ۱}}{\text{جم ۱} + ۱} = \text{مس (۲۵ ± ۱)}$
- ۱۲- $\frac{\text{مس ۱۸}}{\text{مس ۱۲}} = \frac{\text{قط ۱۸} - ۱}{\text{قط ۱۲} - ۱}$
- ۱۳- $\frac{۱ + \text{مس (۲۵ - ۱)}}{\text{مس (۲۵ - ۱)}} = \text{قم ۱۲}$
- ۱۴- $\frac{\text{جم ۱} + \text{جم ۱}}{\text{جم ۱} - \text{جم ۱}} = \frac{\text{مس ۲} + \text{مس ۲}}{\text{مس ۲} - \text{مس ۲}}$
- ۱۵- $\frac{\text{جم ۱} - \text{جم ۱}}{\text{جم ۱} - \text{جم ۱}} = \text{مس (۱ + ۱)}$
- ۱۶- $\text{مس (} \frac{۲}{۱} + \text{ط) - مس (} \frac{۲}{۱} - \text{ط) = ۲ مس ۲ ط}$
- ۱۷- $\frac{\text{جم ۱} + \text{جم ۱}}{\text{جم ۱} - \text{جم ۱}} = \frac{\text{جم ۱} - \text{جم ۱}}{\text{جم ۱} + \text{جم ۱}}$ - ۲ مس ۱۲
- ۱۸- $\text{مم (۱ + ۱) - مس (۱ - ۱) = \frac{\text{جم ۲}}{\text{جم ۲} + ۱}$

$$۱۹- \frac{\text{جب ط} + \text{جب ۲ ط}}{\text{جم ط} + \text{جم ۲ ط}} = \text{مس ط} - ۲۰ - \frac{\text{جم ط} - \text{جم ۲ ط}}{\text{جم ط} + \text{جم ۲ ط}} = \text{مس ط}$$

$$۲۱- \frac{\text{جم (ن+۱) - جب (ن-۱)}}{\text{جم (ن+۱) + ۲ جم ن + ۱ جم (ن-۱)}} = \text{مس ط}$$

$$۲۲- \frac{\text{جم (ن+۱) + ۲ جب ن + ۱ جب (ن-۱)}}{\text{جم (ن-۱) - ۱ جم (ن+۱)}} = \text{مس ط}$$

$$۲۳- \text{جب (ن+۱) + ۱ جب ن = ۱ جب (ن+۱) - ۱ جب ن}$$

$$۲۴- \frac{\text{جب (۳+۱) + جب (۳+۱) ب}}{\text{جم (۱+۱) ب}} = \text{مس ط}$$

$$۲۵- \text{جب ۳ + ۱ جب ۲ - ۱ جب ۱ = ۲ جب ۱ جم ۱ جم ۳}$$

$$۲۶- \text{مس ۱۲} = (۱ + ۱۲) \sqrt{۱ - ۱۲}$$

$$۲۷- \text{جم ۲ ط} + ۳ جم ۲ ط = ۴ (جم ط - جب ط)$$

$$۲۸- ۱ + جم ۲ ط = ۲ (جم ط + جب ط)$$

$$۲۹- \text{قط ۱} = (۱ + \text{قط ۲}) = ۲ \text{قط ۲}$$

$$۳۰- \text{قم ۱} - ۲ مم ۲ = ۲ جب ۱$$

$$۳۱- \text{مم ۱} = \frac{۱}{۲} (\text{مم} - \text{مس})$$

$$۳۲- \text{جب ع جب (ع-۶۰) جب (ع+۶۰)} = \frac{۱}{۲} \text{جب ۳ ع}$$

$$۳۳- \text{جم ع جم (ع-۶۰) جم (ع+۶۰)} = \frac{۱}{۲} \text{جم ۳ ع}$$

$$۳۴- \text{مم ع + مم (ع+۶۰) - مم (ع-۶۰)} = ۳ مم ۳ ع$$

(۱۱) سے نیز ہمیں حاصل ہوگا -

$$\frac{\text{جب } ۱ = ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}}{\text{جم } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{۲ \text{ مس } \frac{۱}{۲} - \text{جم } \frac{۱}{۲}}{۱ + ۲ \text{ مس } \frac{۱}{۲}}$$

شمار کنندہ اور مذکور بنام دونوں کو جم $\frac{۱}{۲}$ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{جم } ۱ - \text{جب } \frac{۱}{۲}}{\text{جم } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲}} = \text{جم } ۱$$

اسی طرح سے

$$= \frac{۱ - \text{مس } \frac{۱}{۲}}{۱ + \text{مس } \frac{۱}{۲}}$$

۱۱۴ - زاویہ $\frac{۱}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جم ۱ کی رقوم میں بیان کر

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۲) کے مطابق

$$\text{جم } ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

$$\text{یعنی } ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} = ۱ - \text{جم } ۱$$

$$\text{اور اس لئے جب } \frac{۱}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۱ - \text{جم } ۱}{۲}} \dots (۱)$$

$$\text{نیز } \text{جم } ۱ = ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} - ۱$$

$$\text{یعنی } ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} = ۱ + \text{جم } ۱$$

(۲) اور اس لئے حجم $\frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{حجم}}{2}}$

(۳) اس لئے مس $\frac{1}{2} = \frac{\text{جب}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{حجم}}{1 + \text{حجم}}}$

۱۱- مندرجہ بالا ضابطوں میں سے ہر ایک میں ایک مشتق علامت ہے کسی خاص صورت میں مناسب علامت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، دیکھو اشلہ ذیل

مثال ۱- معلوم ہے حجم $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ، جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور حجم $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں ۱ برابر $\frac{1}{2}$ رکھیں تو حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{حجم}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2 - 1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اب جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لازماً مثبت ہے اس لئے اوپر کی علامت لینی جائیے

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{اسی طرح } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{حجم}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2 + 1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

نیز جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ مثبت ہے۔

$$\frac{\sqrt{3m+2}}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ جم}$$

مثال ۲- اگر جم $\frac{3m}{2} = 330$ موجب ۱۶۵ اور جم ۱۶۵ کی قیمتیں دریافت کرو

مسادات (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$\frac{\frac{3m}{2} - 1}{2} \sqrt{m} \pm \frac{330 - \text{جم}}{2} \sqrt{m} \pm = 165 \text{ جب}$$

$$\frac{1 - 3m}{2m^2} \pm = \frac{330 - 2}{8} \sqrt{m} \pm =$$

$$\frac{\frac{3m}{2} + 1}{2} \sqrt{m} \pm = \frac{330 - \text{جم} + 1}{2} \sqrt{m} \pm = 165 \text{ جم نیز}$$

$$\frac{1 + 3m}{2m^2} \pm = \frac{330 + 2}{8} \sqrt{m} \pm =$$

اب ناویہ ۱۶۵، ۹۰ اور ۱۸۰ کے درمیان واقع ہے یعنی موجب دفعہ ۵۸ اس کی جیب مثبت ہے اور جیب انعام منفی

$$\frac{1 - 3m}{2m^2} = 165 \text{ جب اس لئے}$$

$$\frac{1 + 3m}{2m^2} = -165 \text{ جم اور}$$

اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ جب ناویہ ۱۸۰ اور اس کی جیب انعام دونوں معلوم ہوں تو زاویہ $\frac{1}{2}$ کی مختلفی نسبتیں بغیر مشتبہ علامت کے معلوم ہو سکتی ہیں لیکن جب مرتبہ معلوم ہو تو جب $\frac{1}{2}$ اور جم $\frac{1}{2}$ کو دریافت کرنے میں ہمیشہ مشتبہ علامت واقع ہوں گی اس اشتباہ کی وجہ دفعہ ذیل میں مندرج ہے

۱۱۸- جب ہم حجم $\frac{1}{2}$ اور جب $\frac{1}{4}$ کو حجم ۱ کی رقوم میں دریا کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشعبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو
 حجم ۱ = حجم (۲ ن ± ۱) = ک (فرض کرو)
 اس لئے ظاہر ہے کہ جس صائبے سے ہم کو حجم $\frac{1}{2}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی صائبے سے $\frac{1}{4}$ ن ± ۱ کی جیب اتمام بھی حاصل ہوگی۔

$$\text{اب} \quad \text{جہم} \frac{1}{2} \text{ ن} \pm 1 = \text{جہم} (2 \text{ ن} \pm 1) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= \text{جہم} 2 \text{ ن} \pm \frac{1}{4} = \text{جہم} 2 \text{ ن} \pm 1 \text{ جب } \frac{1}{4}$$

$$= \text{جہم} 2 \text{ ن} \pm \frac{1}{4} = \pm \text{جہم} \frac{1}{4}$$

جہاں مثبت علامت یعنی چارے اگزن جفت ہو اور منفی

اگزن طاق ہو

اسی طرح جس صائبے سے ہم کو جب $\frac{1}{4}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔ اسی صورت سے ضرور ہے کہ $\frac{1}{4}$ ن ± ۱ کی جیب بھی حاصل ہو۔

$$\text{نیز} \quad \text{جب} \frac{1}{2} \text{ ن} \pm 1 = \text{جب} (2 \text{ ن} \pm 1) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= \text{جب} 2 \text{ ن} \pm \frac{1}{4} = \pm \text{جب} 2 \text{ ن} \pm 1 \text{ جب } \frac{1}{4}$$

$$= ۱ \text{ جم } ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

پس معلوم ہوا کہ ہر ایک صورت میں ہمیں جم $\frac{۱}{۲}$ اور جب $\frac{۱}{۲}$ کی دو قیمتیں ملنی چاہئیں اور یہی تعداد دفعہ ۱۱۶ کے ضابطوں سے حاصل ہوتی ہے۔

[طالب علم اس دفعہ کی ہندسی توضیح زوایا $\frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ کی نسبتیں $\frac{۱}{۲}$ کو شکل میں کھینچنے سے کر سکتا ہے، ان زاویوں کو احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہونگے ان میں سے دو مقام خط ابتدائی کی مثبت سمت سے زاوے $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ بنائیں گے اور دو مقام خط ابتدائی کی سمت منفی سے زاوے $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ بنائیں گے، شکل سے ظاہر ہوگا کہ جم $\frac{۱}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں اور ایسے ہی جب $\frac{۱}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں]

۱۱۹۔ زاویہ $\frac{۱}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جب ۱ کی رقوم میں بیان کرو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۱) سے

$$(۱) \quad ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ جب } ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

$$(۲) \quad \text{نیز} \quad ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} = ۱ \dots\dots\dots (۲)$$

سب سے اول ان مساواتوں کو جمع کرو اور پھر (۱) کو (۲) سے تفریق کرو، تو حاصل ہوگا

$$۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} = ۱ + ۱ \text{ جب } ۱$$

$$\text{اور} \quad ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} - ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} = ۱ - ۱ \text{ جب } ۱$$

$$\text{یعنی} \quad (۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲}) = ۱ + ۱ \text{ جب } ۱$$

اور (جب $\frac{1}{p}$ - جم $\frac{1}{p}$) $= 1$ - جب ۱

پس جب $\frac{1}{p}$ + جم $\frac{1}{p}$ $= \pm$ $\sqrt{1 + \text{جب } 1}$ (۳)

اور جب $\frac{1}{p}$ - جم $\frac{1}{p}$ $= \pm$ $\sqrt{1 - \text{جب } 1}$ (۴)
معادلات (۳) اور (۴) کو جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

۲ جب $\frac{1}{p}$ $= \pm$ $\sqrt{1 + \text{جب } 1} \pm \sqrt{1 - \text{جب } 1}$ (۵)

اور ۲ جم $\frac{1}{p}$ $= \pm$ $\sqrt{1 + \text{جب } 1} \mp \sqrt{1 - \text{جب } 1}$ (۶)

نادرہ $\frac{1}{p}$ کی باقی مثلثی نسبتیں آسانی حاصل ہو سکتی ہیں -

۱۲۰ - منوابط (۵) اور (۶) میں دو مشتبہ علامات ہیں -
امثلہ ذیل سے معلوم ہو گا کہ کسی خاص صورت میں یہ اختصار
کس طرح دور ہو سکتا ہے -

مثال ۱ - جب ۶۰ کی قیمت $\frac{1}{p}$ معلوم ہے ، جب ۱۵ اور جم ۱۵ کی قیمتیں
دریافت کرد -

لگرا = ۶۰ تو معادلات (۳) اور (۴) سے حاصل ہو گا -

جب ۱۵ + جم ۱۵ $= \pm$ $\sqrt{1 + \text{جب } 1} \pm \sqrt{1 - \text{جب } 1}$ $= \pm \frac{31}{16}$

جب ۱۵ - جم ۱۵ $= \pm$ $\sqrt{1 + \text{جب } 1} \mp \sqrt{1 - \text{جب } 1}$ $= \pm \frac{1}{16}$

اب چونکہ جب ۱۵ اور جم ۱۵ دونوں مثبت ہیں اور جم ۱۵ بہ نسبت

جب ۱۵ کے بڑی ہے اس لئے جملات جب ۱۵ + جم ۱۵ اور جب ۱۵

جم ۱۵ بالترتیب مثبت اور منفی ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ

جب ۱۵ + جم ۱۵ $= + \frac{31}{16}$

اور جب ۱۵ - جم ۱۵ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے جب ۱۵ = $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

اور جم ۱۵ = $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

مثال ۲- اگر جب ۵۰ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ تو جب ۲۸۵ اور جم ۲۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ۵۰ = ۱ تو حاصل ہوگا

جب ۲۸۵ + جم ۲۸۵ = $\pm 1 \pm$ جب ۵۰ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور جب ۲۸۵ - جم ۲۸۵ = $\pm 1 \pm$ جب ۵۰ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

شکل سے معلوم ہوگا کہ جب ۲۸۵ منفی ہے اور جم ۲۸۵ مثبت ہے

نیز زاویہ ۲۸۵ کی جیب تعداداً جیب التمام سے بڑی ہے اس لئے جہ

جب ۲۸۵ + جم ۲۸۵ منفی ہے اور جب ۲۸۵ - جم ۲۸۵ بھی منفی ہے

∴ جب ۲۸۵ + جم ۲۸۵ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور جب ۲۸۵ - جم ۲۸۵ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے جب ۲۸۵ = $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

اور جم ۲۸۵ = $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

۱۲۱- جب ہم جم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور جب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو جب لا کی رقوم میں بیان

کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

جب $n = \pi + (-1)^n$ جب $n = 1$ ک (فرض کرو)..... (صفحہ ۸۸)

اس سے ظاہر ہے کہ جس منابطے سے ہکو جب $\frac{1}{4}$ کی قیمت ک کی رقم میں حاصل ہوتی ہے اسی منابطے سے $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ کی جب کی قیمت بھی حاصل ہوگی

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جنت ہے اور ۲ م کے برابر ہے تو جب $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ = جب (م + $\frac{1}{4}$)

$$= \text{جب } ۲ \text{ جم } \frac{1}{4} + \text{جب } ۲ \text{ جم } \frac{1}{4} = \text{جب } ۲ \text{ جم } \frac{1}{4}$$

$$= \text{جب } \frac{1}{4} \text{ جہاں علامت مثبت یعنی چاہئے اگر م جنت ہو}$$

اور منفی اگر طاق ہو

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ + ع + اب

$$\text{جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \text{جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$= \text{جب } \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right\}$$

$$= \text{جب } ۲ \text{ جم } \frac{1}{4} + \text{جب } ۲ \text{ جم } \frac{1}{4} = \text{جب } ۲ \text{ جم } \frac{1}{4}$$

= جم ۲ جم $\frac{1}{4}$ = جم $\frac{1}{4}$ اس میں علامت مثبت ہو اگر ع جنت ہو اور منفی اگر ع طاق ہو

پس معلوم ہوا کہ جس منابطے سے ہکو جب $\frac{1}{4}$ کی قیمت جب ۱ کی

رقم میں حاصل ہوتی ہے اسی منابطے سے علاوہ اس کے

جب $\frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$ = جم $\frac{1}{4}$ کی قیمتیں یعنی کل چار قیمتیں حاصل ہونی

چاہئیں۔ اور منوابط دفعہ ۱۱۹ میں مشتبہ علامات کے تمام مختلف

اجتماع لینے سے قیمتوں کی یہی تعداد حاصل ہوتی ہے

اسی قسم کے عمل سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر حجم ۱/۲ کو جب ۱/۲ کی رقوم میں دریافت کیا جائے تو چار قیمتیں حاصل ہونگی۔

[اگر ایک شکل ہندسیہ میں زاوے $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ یعنی $\frac{3\pi}{4}$ یعنی $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{2}$ اس صورت میں کیجئے جائیں جہاں $\frac{1}{2}$ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو معلوم ہوگا کہ احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہیں، ان میں سے دور پہلے اول میں خط ابتدائی سے زاوے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{\pi}{4}$ ۔ $\frac{1}{2}$ بناتے ہیں اور دو پہلے سوم میں خط ابتدائی کی منہی سمت سے زاوے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{\pi}{4}$ ۔ $\frac{1}{2}$ بناتے ہیں، شکل سے ظاہر ہوگا کہ ہمیں چار قیمتیں جب $\frac{1}{2}$ کی اور چار قیمتیں حجم $\frac{1}{2}$ کی حاصل ہونی چاہئیں اور زاویہ $\frac{1}{2}$ کی باقی قیمتوں کی بھی یہی کیفیت ہے۔

۱۲۲۔ کسی صورت عامہ میں ہم دفعہ ۱۱۹ کے ارتباطات (۳) اور (۴) کی مشتبہ علامات اس طرح دور کر سکتے ہیں۔

$$\text{جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (ما) } \left(\frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ (ما) } \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (ما) } \left[\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (ما) } + \frac{1}{2} \text{ (ما) } \right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (ما) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{اور } \frac{1}{2} \text{ (ما) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ مثبت ہوگا اگر } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{2} \text{ کے درمیان واقع ہو}$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{1}{2} \text{، } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{2} \text{ کے درمیان واقع ہو}$$

$$\text{اسلئے جلد جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ مثبت ہوگا اگر زاویہ } \frac{1}{2}$$

$۲ن۲ - ۲$ اور $۲ن۲ + ۲$ کے درمیان واقع ہو

ورنہ یہ منفی ہوگا۔

اور اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

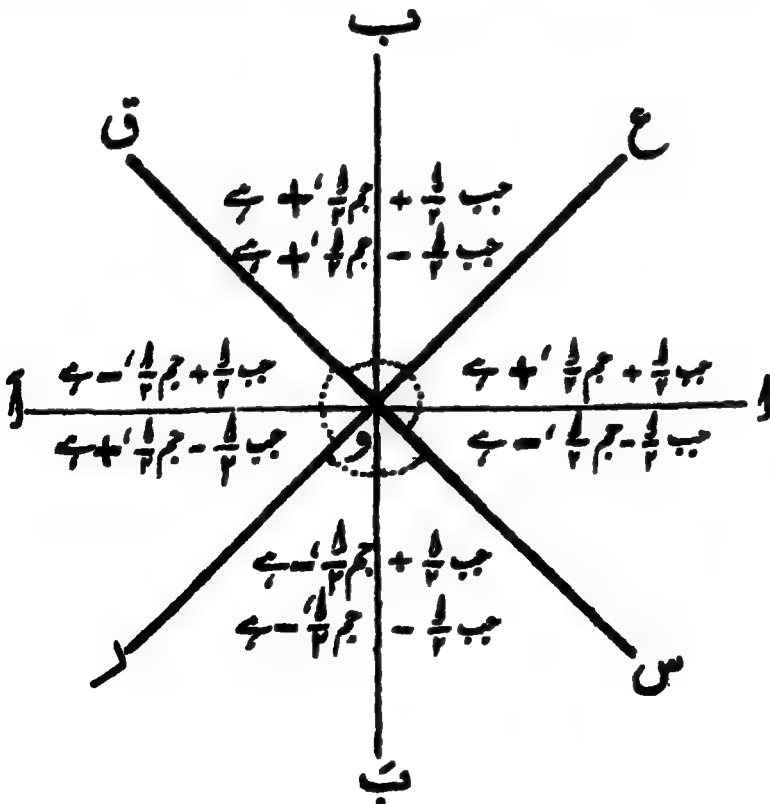
$$\text{جب } \frac{1}{4} - \text{جم } \frac{1}{4} = ۲ \text{ جب } \left(\frac{1}{4} - \frac{۲}{۳} \right)$$

اس لئے جب $\frac{1}{4} - \text{جم } \frac{1}{4}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\left(\frac{۲}{۳} - \frac{1}{4} \right)$

$۲ن۲$ اور $۲ن۲ + ۲$ کے درمیان واقع ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{1}{4} - ۲ن۲ + ۲$

اور $۲ن۲ + ۲$ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا

اس دفعہ کے نتائج کی توضیح تریسیمی طور پر شکل ذیل میں کی گئی ہے



و خط ابتدائی ہے اور خطوط 'دق' 'ور' 'وس' بالترتیب
 ربع اول، دوم، سوم، چارم کے زاویوں کی تقصیف کرتے ہیں۔
 مثال عددی۔ اگر $\frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ - $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$ تو
 دریافت کرو کہ زاویہ $\frac{1}{4}$ کو کن عدد کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔
 اس صورت میں دفعہ ۱۱۹ کے ضابطے لازماً جوئے جائیں۔

$$\text{جب } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

$$\text{جب } \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ (۲)}$$

کیونکہ ان دونوں ضابطوں کو جمع کرنے سے ضابطہ معلوم حاصل ہوتا ہے
 مساوات (۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جو خط زاویہ $\frac{1}{4}$ کا احاطہ کرتا ہے اسکو
 خطوط 'دق' اور 'ور' کے درمیان یا 'ور' اور 'وس' کے درمیان واقع
 ہونا چاہیے اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ خط دائرہ کو خطوط 'ور' اور
 'وس' یا 'وس' اور 'دق' کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔
 اور دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں جب خط دائرہ 'ور' اور 'وس' کے
 درمیان واقع ہو یعنی جب زاویہ $\frac{1}{4}$ ،

$\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان واقع ہو
 ۱۲۳ - زاویہ $\frac{1}{4}$ کی مثلثی نسبتوں کو مس و کی رقم میں
 بیان کرو۔

مساوات (۳) دفعہ ۱۱۵ سے

$$\frac{\text{مس } \frac{1}{4}}{\text{مس } \frac{1}{4}} = \frac{\text{مس } \frac{1}{4}}{\text{مس } \frac{1}{4}}$$

$$1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}$$

$$\text{یعنی } 1 = \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}$$

طرفین پر $\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}$ زیادہ کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} + 1$$

$$1 + \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} + 1$$

$$1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} \quad (1)$$

۱۲۴۔ مساوات (۱) کی مشتبہ علامت صرف اس صورت میں دور ہو سکتی ہے جب ہمیں ۱ کی مقدار کے متعلق کچھ معلوم ہو۔
مثال۔ اگر $\text{مس } ۱۵ = ۲ - ۳۴$ تو $\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = ۱$ دریافت کرو
دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) فرض کرو کہ $۱ = ۱۵$

$$\frac{1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}}$$

$$1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} \quad (1)$$

اب چونکہ $\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}$ مثبت ہے اسلئے ہمیں اوپر کی علامت یعنی $\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}$ چاہیئے۔

$$\frac{1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4}}$$

$$= (\overline{3}m + 2)(1 - \overline{2}m - \overline{4}m)$$

$$= \overline{4}m - \overline{3}m + 2 - \overline{2}m = (1 - \overline{2}m)(\overline{2}m - \overline{3}m)$$

چونکہ مس ۱۵ = مس ۱۹۵ اس لئے جس مساوات سے ہیکو مس ۱۵ کی قیمت مس ۱۵ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی مساوات سے ہیکو مس ۱۹۵ کی قیمت مس ۱۹۵ کی رقوم میں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیئے۔ اصل جو قیمت مساوات (۱) میں علامت جذر کے ماقبل منفی علامت لینے سے حاصل ہوتی ہے وہ مس ۱۹۵ کی قیمت ہے

$$\text{لہذا مس } \frac{1 - \overline{3}m - \overline{8}m}{\overline{3}m - 2} = \frac{1 - (\overline{2}m - \overline{4}m)}{\overline{3}m - 2}$$

$$= \frac{1 - (\overline{2}m - \overline{4}m)}{\overline{3}m - 2} = (\overline{3}m + 2)(1 - \overline{2}m + \overline{4}m) =$$

$$= (1 + \overline{2}m)(\overline{2}m + \overline{3}m)$$

$$\text{اس لئے } -\text{مم } \frac{1}{2} = \text{مس } \frac{9}{4}$$

$$= (\overline{2}m + \overline{3}m)(1 + \overline{2}m)$$

۱۲۵۔ اس امر کی تحقیق کرو کہ جب ہم مس ۱/۴ کو مس ۱ کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے؟

دفعہ ۹۰ سے ہیکو معلوم ہے کہ اگر ن کوئی عدد صحیح ہو تو

$$\text{مس } (n + 1) = \text{مس } 1 = k \text{ (فرض کرو)}$$

اس سے معلوم ہوا کہ جس مساوات سے ہیکو مس ۱/۴ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی مساوات سے

سرس $\frac{1+n}{2}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیے۔
صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جنت ہے اور م کے برابر ہے۔

$$\text{تب سرس } \frac{1+n}{2} = \text{سرس } \frac{1+m}{2}$$

$$= \text{سرس } (m + \frac{1}{2}) = \text{سرس } \frac{1}{2} \text{ بموجب دفعہ ۹۰}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور $1 + 2 = 3$

$$\text{تب سرس } \frac{1+n}{2} = \text{سرس } \frac{1+m(1+2)}{2}$$

$$= \text{سرس } (3m + \frac{1}{2}) = \text{سرس } \frac{1}{2} \text{ (دفعہ ۹۰)}$$

$$= -m \frac{1}{2} \text{ (دفعہ ۷۶)}$$

اس سے معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہم کو سرس $\frac{1}{2}$ کی قیمت حاصل ہوگی اُسی ضابطے سے $-m \frac{1}{2}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیے۔

اس کی توضیح دفعہ گزشتہ کی ایک مثال میں ہو چکی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸

۱۔ اگر جب ط = $\frac{1}{2}$ اور جب ف = $\frac{1}{2}$ تو جب (ط + ف) اور جب (ط + ف) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۔ کسی زاویہ کا ماس ۲ و ۳ ہے، اس کا قاطع التمام، اس کے نصف زاویہ کا قاطع التمام اور اس کے دو چند زاویہ کے مکملہ کا قاطع التمام دریافت کرو۔

$$۱۶- \text{جب } \left(\frac{4}{p} + \frac{q}{8}\right) \text{ جب } \left(\frac{4}{p} - \frac{q}{8}\right) = \frac{1}{p} \text{ جب } ۱$$

$$۱۷- \text{جم } ۷۰ + \text{جم } (۷۰ + ۱۲۰) + \text{جم } (۷۰ - ۱۲۰) = \frac{۳}{p}$$

$$۱۸- \text{جم } \frac{۳}{p} = \text{جم } \frac{۳}{8} + \text{جم } \frac{۳}{8} + \text{جم } \frac{۳}{8} + \text{جم } \frac{۳}{8}$$

$$۱۹- \text{جب } \frac{۳}{p} = \text{جب } \frac{۳}{8} + \text{جب } \frac{۳}{8} + \text{جب } \frac{۳}{8} + \text{جب } \frac{۳}{8}$$

$$۲۰- \text{جم } ۲۲ + \text{جب } (۲۰ - ۲۰) - \text{جب } (۲۰ + ۲۰) = \text{جب } (۲۰ + ۲۰)$$

$$۲۱- \text{مس } (۱۲ + ۱۲) (۱۲ - ۱۲) = \text{مس } (۱۲ + ۱۲) = \text{مس } ۲۴$$

$$۲۲- (۱ + \text{مس } \frac{۳}{p} - \text{قط } \frac{۳}{p}) (۱ + \text{مس } \frac{۳}{p} + \text{قط } \frac{۳}{p}) = \text{جب } ۲۴$$

ذیل کی تین صورتوں میں علامات جذر کے ماقبل جو مناسب علامات جبرہ کہی جانی چاہئیں انہیں دریافت کرو۔

$$۲۳- ۲ \text{ جم } \frac{4}{p} = \pm \sqrt{۱ - \text{جب } \frac{4}{p}} \pm \sqrt{۱ + \text{جب } \frac{4}{p}} \text{ جہاں } \frac{4}{p} = ۲۷۸$$

$$۲۴- ۲ \text{ جب } \frac{4}{p} = \pm \sqrt{۱ - \text{جب } \frac{4}{p}} \pm \sqrt{۱ + \text{جب } \frac{4}{p}} \text{ جہاں } \frac{4}{p} = \frac{۱۱۹}{11}$$

$$۱۵- ۲ \text{ جم } \frac{4}{p} = \pm \sqrt{۱ - \text{جب } \frac{4}{p}} \pm \sqrt{۱ + \text{جب } \frac{4}{p}} \text{ جہاں } \frac{4}{p} = ۱۴۰$$

$$۲۶- \text{اگر } ۳۴۰ = \text{ثابت کردہ}$$

$$۲ \text{ جب } \frac{4}{p} = \sqrt{۱ + \text{جب } \frac{4}{p}} + \sqrt{۱ - \text{جب } \frac{4}{p}}$$

$$\text{اور } ۲ \text{ جم } \frac{4}{p} = \sqrt{۱ + \text{جب } \frac{4}{p}} - \sqrt{۱ - \text{جب } \frac{4}{p}}$$

$$۲۷- \text{اگر } ۳۶۰ = \text{ثابت کردہ}$$

$$۲ \text{ جم } \frac{4}{p} = \sqrt{۱ + \text{جب } \frac{4}{p}} + \sqrt{۱ - \text{جب } \frac{4}{p}}$$

- اگر ۱ = ۵۸۰ تو ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = - \overline{m+1} \text{ جب } - \overline{m-1} \text{ جب } a$$

- کن حدود کے درمیان $\frac{1}{p}$ کو واقع ہونا چاہیئے کہ

$$(۱) ۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = \overline{m+1} \text{ جب } a + \overline{m-1} \text{ جب } a$$

$$(۲) ۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = - \overline{m+1} \text{ جب } a + \overline{m-1} \text{ جب } a$$

$$(۳) ۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = \overline{m+1} \text{ جب } a - \overline{m-1} \text{ جب } a$$

$$(۴) ۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = \overline{m+1} \text{ جب } a - \overline{m-1} \text{ جب } a$$

- کن حدود کے درمیان $\frac{1}{p}$ کو واقع ہونا چاہیئے کہ مضابطہ

$$۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = \overline{m+1} \text{ جب } a + \overline{m-1} \text{ جب } a$$

میں (۱) دونوں علامات مثبت لیجا سکیں

(۲) دونوں علامات منفی لیجا سکیں

(۳) پہلی علامت منفی ہو اور دوسری مثبت

اگر ن کوئی عدد صحیح ہو اور کوئی ناویز ۲ ن - $\frac{p}{۳}$ اور ۲ ن + $\frac{p}{۳}$ کے

ن واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی جیب از روئے الجبر جیب اتمام سے

لی۔

- اگر جب $\frac{1}{p}$ کی قیمت مساوات

$$\text{جب } a = ۳ \text{ جب } \frac{1}{p} - ۴ \text{ جب } \frac{1}{p}$$

دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے علاوہ اسی مساوات سے ہکو

$\frac{4-p}{۳}$ اور - جب $\frac{1}{p} + \frac{۲}{۳}$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیئے

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو۔

۳۳۔ اگر حجم $\frac{1}{3}$ کی قیمت مساوات

$$\text{حجم } ۱ = ۴ \text{ حجم } ۲ - \frac{1}{3} \text{ حجم } ۳$$

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ علاوہ اس کے اُسی مساوات سے ہکو

حجم $\frac{1-۱۸}{۳}$ اور حجم $\frac{1+۱۸}{۳}$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیے۔

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو

۱۳۶۔ اس باب کے منابھوں کے استعمال سے اب ہم چند

مشہور زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں۔

ناویہ ۱۸ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ طہ = ۱۸ پس ۲ طہ = ۳۶ اور ۳ طہ = ۵۴

نیز ۲ طہ = ۹۰۔ ۳ طہ

اس لئے جب ۲ طہ = جب (۹۰ - ۳ طہ) = حجم ۳ طہ

۲ جب ۲ طہ = ۴ حجم ۲ طہ - ۳ حجم طہ (دفعات ۱۱ اور ۱۱۳)

اس سے معلوم ہوا کہ حجم طہ = جس سے طہ = ۹۰

یا ۲ جب طہ = ۴ حجم ۲ طہ - ۳ = ۱ - ۴ جب طہ

۴ جب طہ + ۲ جب طہ = ۱

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جب طہ} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

مگر اس صورت میں جب طہ لازماً ایک مثبت مقدار ہے
اس لئے ہمکو مثبت علامت لیننی چاہیئے۔ پس

$$\text{جب } 18 = \frac{1 - \sqrt{52}}{3}$$

$$\text{اور حجم } 18 = 1 - \sqrt{1 - \frac{52 - 4}{14}} = 18^2 \text{ جب } 18 = \frac{52 - 4}{14} - 1$$

$$\frac{52 + 10}{3} = \frac{52 + 10}{14} = 1$$

اب زاویہ ۱۸ کی باقی مثلثی نسبتیں آسانی معلوم ہو سکتی ہیں
چونکہ زاویہ ۱۸ کا متمم ۷۲ ہے اس لئے زاویہ ۷۲ کی مثلثی نسبتیں
دفعہ ۷۵ کی اعانت سے آسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔
۱۲۷۔ زاویہ ۳۶ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔

چونکہ حجم ۲ طہ = ۱ - جب ۲ طہ (دفعہ ۱۱۱)

$$\therefore \text{حجم } 36 = 1 - 2 = 1 - \left(\frac{52 - 4}{14} \right) = 1 - \frac{52 - 4}{14} = 1 - \frac{52 - 4}{14}$$

$$\text{پس حجم } 36 = \frac{1 + \sqrt{52}}{3}$$

$$\text{اس لئے جب } 36 = 1 - \sqrt{1 - \frac{52 - 4}{14}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{52 - 4}{14}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{52 - 4}{14}}$$

اب زاویہ ۳۶ کی باقی مثلثی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں
نیز چونکہ زاویہ ۳۶ کا متمم ۵۴ ہے اس لئے ۵۴ کی مثلثی نسبتیں
بھی دفعہ ۷۵ کی مدد سے آسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔

۱۲۸۔ جب ۱۸ اور حجم ۳۶ کی قیمتیں بطریق ہندسیہ اس طرح

حاصل ہو سکتی ہیں۔

بموجب اقلیدس م ۶ ش ۱۰ ایک مثلث Δ ب ج بناؤ یعنی مثلث کے زاویوں ب اور ج میں سے ہر ایک زاویہ Δ کا دو چہرہ جو۔ تب

$$180^\circ = \Delta + \Delta + \Delta = 3\Delta$$

$$\Delta = 36^\circ$$

پس اگر ب ج پر عمود Δ د نکالا جائے تو

$$\Delta = 18^\circ$$



اب اقلیدس کے عمل سے ہم جانتے ہیں کہ ب ج برابر Δ کے ہے جہاں Δ ایسا نقطہ Δ ب پر ہے کہ

$$\Delta \text{ ب } \times \Delta \text{ ب } \Delta = (\Delta \text{ ب } \Delta)$$

فرض کرو کہ $\Delta \text{ ب } = \Delta$ اور $\Delta \text{ ب } = \Delta$

اوپر کے ربط سے حاصل ہوگا

$$\Delta = (\Delta - \Delta)$$

$$\Delta + \Delta = \Delta$$

$$\Delta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{اس لئے جب } 18^\circ = \Delta \text{ ب } \Delta = \frac{\Delta \text{ ب } \Delta}{\Delta \text{ ب } \Delta} \times \frac{1}{\Delta} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Delta} \times \frac{1}{\Delta} =$$

نیز بموجب اقلیدس م ۶ ش ۱۰ Δ اور Δ ج باہم مساوی ہیں۔

اس لئے اگر اوج پر عمود لال نکالا جائے تو اوج کی تنصیف نقطہ
ل پر ہوگی۔

$$\text{اس لئے حجم } ۳۶ = \frac{\text{اوج}}{۸} = \frac{۱}{۲} \div ۸ = \frac{۱}{۱۶}$$

$$\frac{۱-۵۲}{۳} = \frac{۱-۵۲}{(۱+۵۲)(۱-۵۲)} =$$

۱۲۹۔ زادیہ ۹۰ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

چونکہ جب ۹۰ اور حجم ۹۰ دونوں مثبت ہیں اسلئے ربط (۳) دفعہ ۱۱۹ سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } ۹۰ + ۹۰ = ۱۸ \text{ جب } ۱۸$$

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{۵۲+۳۲}{۲} = \frac{۱-۵۲}{۳} + ۱۸ =$$

نیز چونکہ حجم ۹۰ مقدار میں جب ۹۰ سے بڑا ہے (دفعہ ۵۹) اسلئے جملہ
جب ۹۰۔ حجم ۹۰ منفی ہے لہذا ربط ۳ دفعہ (۱۱۹) سے حاصل ہوگا

$$\text{جب } ۹۰ - ۹۰ = -۱۸ \text{ جب } ۱۸$$

$$\frac{۱-۵۲}{۳} - ۱۸ =$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{۵۲-۵۲}{۲} =$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$\text{جب } ۹۰ = \frac{۵۲-۵۲-۵۲+۳۲}{۳}$$

نیز (۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

$$\text{جم} ۹ = \frac{۵۲ - ۵۲ + ۵۲ + ۳۲}{۴}$$

اب زاویہ ۹ کے باقی جملے دریافت ہو سکتے ہیں
نیز چونکہ ۸۱ زاویہ ۹ کا ستیم ہے اسلئے دفعہ ۷۵ کی مدد سے ۸۱
کی مثلثی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۹

ثابت کر دو کہ

$$۱ - \text{جب} ۲۲ - \text{جب} ۹۰ = \frac{۱ - ۵۲}{۸}$$

$$۲ - \text{جم} ۲۸ - \text{جب} ۱۲ = \frac{۱ + ۵۲}{۸}$$

$$۳ - \text{جم} ۱۲ + \text{جم} ۹۰ + \text{جم} ۸۴ = \text{جم} ۲۲ + \text{جم} ۲۸ \text{ عمل ترسیبی سے اس کی تصدیق کرو۔}$$

$$۴ - \text{جب} \frac{\pi}{۵} \text{ جب} \frac{\pi}{۵} \text{ جب} \frac{\pi}{۵} \text{ جب} \frac{\pi}{۵} = \frac{\pi}{۱۴}$$

$$۵ - \text{جب} \frac{\pi}{۱۰} + \text{جب} \frac{\pi}{۱۰} = \frac{\pi}{۱۰}$$

$$۶ - \text{جب} \frac{\pi}{۱۰} \text{ جب} \frac{\pi}{۱۰} = \frac{\pi}{۱۰}$$

$$۷ - \text{مس} ۶ \text{ مس} ۲۲ \text{ مس} ۹۴ \text{ مس} ۷۸ = ۱$$

$$۸ - \text{جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} = \frac{\pi}{۱۵}$$

$$۹ - ۱۶ \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} \text{ جم} \frac{\pi}{۱۵} = ۱$$

۱۰۔ ایک دائرہ کے دو متوازی وتر مرکز کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں اور ان کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاوئے ۷۲° اور ۳۴° بالترتیب بنتے ہیں، ثابت کرو کہ وتروں کے درمیان عمودی فاصلہ دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی دائرہ کا ایک وتر جس کے محاذی ۱۰۸° کا زاویہ مرکز پر بنتا ہے دو ایسے وتروں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جن کے متقابل مرکز پر زاوئے ۳۶° اور ۷۰° بنتے ہیں۔

۱۲۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب اتمام اس کے کوس کے برابر ہو۔
۱۳۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$\text{جب } ۵ ط = \text{جم } ۳ ط = \text{جب } ۹ ط = \text{جم } ۷ ط$$

باب نہم

متاثلات اور مثلثی معاوالات

۱۔ ضوابط دفعہ ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے دو سے زیادہ راویوں کے حاصل جمع کی مثلثی نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں، مثلاً

$$\begin{aligned} \text{جب (ا + ب + ج)} &= \text{جب (ا + ب) جم + جب (ا + ب) جم} \\ &= \text{جب (ا + ب) جم + جب (ا + ب) جم} \\ &+ \text{جم (ا + ب) جم} \\ &= \text{جب (ا + ب) جم + جب (ا + ب) جم} \\ &+ \text{جم (ا + ب) جم} \end{aligned}$$

اسی طرح سے

$$\begin{aligned} \text{جم (ا + ب + ج)} &= \text{جم (ا + ب) جم + جب (ا + ب) جم} \\ &= \text{جم (ا + ب) جم + جب (ا + ب) جم} \\ &- \text{جم (ا + ب) جم} \\ &= \text{جم (ا + ب) جم + جب (ا + ب) جم} \\ &- \text{جم (ا + ب) جم} \end{aligned}$$

$$\text{نیز مس (ا + ب + ج)} = \frac{\text{مس (ا + ب) + مس ج}}{\text{مس (ا + ب) + مس ج}}$$

لیکن $m_1 + m_2 + \dots + m_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) + 0$ $(n+1)$ ماسوں کا مجموعہ

$m_1 + m_2 + \dots + m_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) + 0$ $(n+1)$ ماسوں میں سے دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$m_1 + m_2 + \dots + m_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) + 0$ $(n+1)$ ماسوں میں سے تین تین کے حاصل ضرب کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا قیاس

اس سے معلوم ہوا کہ $(n+1)$ زاویوں کے لئے بھی وہی قانون درست ہے جو n زاویوں کے لئے ہے، اس لئے اگر مسدود n زاویوں کے لئے صحیح ہو تو یہ $(n+1)$ زاویوں کے لئے بھی صحیح ہوتا ہے، لیکن بموجب دفعات ۱۳۰ اور ۱۳۱ یا ۲ اور ۳ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے ۴ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے ۵ زاویوں کے لئے.....

اس لئے ثابت ہوا کہ یہ بالعموم صحیح ہے،

نتیجہ صریح - اگر کل زاوئے تعداد میں n ہوں اور ان میں سے ہر ایک طہ کے برابر ہو تو

$$m_1 = n \times \text{مس طہ} = \text{ج مس طہ} + \text{مس طہ} + \dots$$

مثال - مس m طہ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{یہاں مس } m \text{ طہ} = \frac{\text{مس} - \text{مس}}{1 - \text{مس} + \text{مس}}$$

$$= \frac{\text{مس طہ} - \text{ج مس طہ}}{\text{ج مس طہ} + \text{مس طہ}}$$

$$\frac{۴ \text{ مسطہ} - ۴ \text{ مسطہ}}{۱ - ۶ \text{ مسطہ} + ۴ \text{ مسطہ}}$$

مثال - ثابت کرو کہ مس ۵ = $\frac{۵ \text{ مسطہ} - ۱۰ \text{ مسطہ} + ۴ \text{ مسطہ}}{۱ - ۱۰ \text{ مسطہ} + ۵ \text{ مسطہ}}$

۱۳۲ - ترکیب دفعہ گذشتہ کے موافق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب (۱ + ۱ + ۱ + + ۱) = ۱
 = جم ۱، جم ۱، جم ۱، جم ۱ (۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ +)
 اور جم (۱ + ۱ + ۱ + + ۱) = ۱
 = جم ۱، جم ۱، جم ۱، جم ۱ (۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ +)
 جہاں ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + کی وہی قیمتیں ہیں جو دفعہ گذشتہ میں بیان ہوئیں۔

۱۳۳ - مثلث کے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے ہمبستگی

جب تین زاوئے ۱، ۲، ۳ ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ ۱۸۰ ہو تو ان کی مثلثی نسبتوں کے کئی ایک باہمی تعلقات آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں ترکیب ثبوت کی توضیح اخلہ ذیل سے ہوگی۔

مثال ۱ - اگر ۱ + ۲ + ۳ = ۱۸۰ تو ثابت کرو کہ

جب ۱ + ۲ + ۳ = ۱۸۰ جب ۲ + ۳ = ۱۸۰ جب ۱ + ۳ = ۱۸۰ جب ۱ + ۲ = ۱۸۰
 اور جب ۱ + ۲ + ۳ = ۱۸۰ جب ۲ + ۳ = ۱۸۰ جب ۱ + ۳ = ۱۸۰ جب ۱ + ۲ = ۱۸۰

۲ = جب (۱ + ۲) جم (۱ - ۲) + ۲ جب ۳ جم ۳

$$۱ + ب + ج = ۱۸۰$$

$$۱ + ب = ۱۸۰ - ج$$

$$ج (۱ + ب) = ج ج \quad ۲$$

$$جم (۱ + ب) = جم ج \dots (وغه ۷۶)$$

$$ج ۲ = ۲ ج ج جم (۱ - ب) + ۲ ج ج جم ج$$

$$= ۲ ج ج [جم (۱ - ب) + جم ج]$$

$$= ۲ ج ج [جم (۱ - ب) - جم (۱ + ب)]$$

$$= ۲ ج ج \times ۲ ج ب$$

$$= ۴ ج ب ج ج$$

$$۲ - اگر ۱ + ب + ج = ۱۸۰ تو ثابت کرد که$$

$$جم ۱ + جم ب - جم ج = ۱ - ۴ جم ۱ + ۴ جم ۲ ج ب - ۴ ج ج$$

$$جم ۱ = جم ۱ + (جم ب - جم ج)$$

$$= ۲ جم ۱ - ۴ جم ۲ ج ب + ۴ ج ج - ۴ ج ج$$

$$ب + ج = ۱۸۰ - ۱ \quad ا ب$$

$$\frac{ب + ج}{۲} = ۹۰ - \frac{۱}{۲} \quad یعنی$$

$$ج ب = \frac{ب + ج}{۲} = جم \frac{۱}{۲} \quad ۳$$

$$جم ب = \frac{ب + ج}{۲} = ج ب \frac{۱}{۲}$$

$$= ۲ جم ۱ - ۴ جم ۲ ج ب + ۴ ج ج - ۴ ج ج \quad ۴$$

$$= ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} [\text{جم } \frac{۱}{۲} + \text{ج} - \text{ب}] - ۱$$

$$= ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} [\text{ج} + \text{ب} - \text{ج} + \text{ب}] - ۱$$

$$= ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \times ۲ \text{ ج} - ۱$$

$$= ۱ - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \times ۲ \text{ ج} - ۱$$

مثال ۳ - اگر $۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰$ ثابت کرو کہ

ج $۱ + \text{ج} + \text{ب} = ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + \text{ج} + \text{ب} = ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + \text{ج} + \text{ب}$
 فرض کر دو کہ $\text{ج} = ۱ + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج}$

تب $۲ = ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + ۱ - ۱ - ۲ \text{ جم } ۲ \text{ ج}$

$$= ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + ۲ - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج}) - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج})$$

$$= ۲ - ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + ۲ - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج}) - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج})$$

اس لئے $\text{ج} = ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + ۲ - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج}) - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج})$

چونکہ $\text{جم } ۱ = ۱۸۰ - (۲ + \text{ج}) = - ۲ \text{ جم } (۲ + \text{ج})$

$$\text{ج} = ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + ۲ - ۲ \text{ جم } ۲ \text{ ج}$$

$$= ۲ + ۲ \text{ جم } ۱ + ۲ - ۲ \text{ جم } ۲ \text{ ج}$$

مثال ۴ - اگر $۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰$ ثابت کرو کہ

$\text{س} ۱ + \text{س} ۲ + \text{س} ۳ = \text{س} ۱ + \text{س} ۲ + \text{س} ۳$

بحسب وجہ دفعہ ۱۳۰ ضابطہ تین میں

$$\therefore \frac{۲}{۱-۲} + \frac{۲}{۱-۲} + \frac{۲}{۱-۲} = \frac{۲}{۱-۲} + \frac{۲}{۱-۲} + \frac{۲}{۱-۲}$$

= مس ۲ + مس ۲ + مس ۲ = مس ۲ مس ۲ مس ۲ ج ۲ ج ۲ ج ۲
(ای قسم کے عمل سے جو آخری مثال میں ہوا۔)

$$\frac{۲}{۱-۲} \times \frac{۲}{۱-۲} \times \frac{۲}{۱-۲} =$$

اشد نمبری ۲۰

اگر ۱+ب+ج = ۱۸۰ ثوابت کر دو کہ

- ۱۔ جب ۲+۱+ج = ۱۸۰ جب ۲-ج = ۲ جم ۱+جم ۱ جب ۱+ج = ۱۸۰
- ۲۔ جم ۲+جم ۲+جم ۲ = ۱۸۰-۱-۲ جم ۱+جم ۱+جم ۱
- ۳۔ جم ۲+جم ۲+جم ۲ = ۱۸۰-۱-۲ جب ۱+جب ۱+جب ۱
- ۴۔ جب ۱+جب ۱+جب ۱ = ۱۸۰-۱-۲ جم ۱+جم ۱+جم ۱
- ۵۔ جب ۱+جب ۱-جب ۱ = ۱۸۰ جب ۱+جب ۱+جب ۱
- ۶۔ جم ۱+جم ۱+جم ۱ = ۱۸۰+۱-۲ جب ۱+جب ۱+جب ۱
- ۷۔ جب ۱+جب ۱-جب ۱ = ۱۸۰ جب ۱+جب ۱+جب ۱
- ۸۔ جم ۱+جم ۱+جم ۱ = ۱۸۰-۱-۲ جم ۱+جم ۱+جم ۱
- ۹۔ جم ۱+جم ۱-جم ۱ = ۱۸۰-۱-۲ جب ۱+جب ۱+جب ۱
- ۱۰۔ جب ۱+جب ۱+جب ۱ = ۱۸۰-۱-۲ جب ۱+جب ۱+جب ۱

$$۱۱- \text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲} - \text{ج ب} \frac{۱}{۲} = ۱ - ۱ = ۰ \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲}$$

$$۱۲- \text{س} \frac{۱}{۲} \text{س} \frac{۱}{۲} + \text{س} \frac{۱}{۲} \text{س} \frac{۱}{۲} + \text{س} \frac{۱}{۲} \text{س} \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$۱۳- \text{م} \frac{۱}{۲} \text{م} \frac{۱}{۲} + \text{م} \frac{۱}{۲} \text{م} \frac{۱}{۲} = \text{م} \frac{۱}{۲} \text{م} \frac{۱}{۲} \text{م} \frac{۱}{۲}$$

$$۱۴- \text{م ب} \text{م ج} + \text{م ج} \text{م ا} + \text{م ا} \text{م ب} = ۱$$

$$۱۵- \text{ب ب} (\text{ب} + \text{ج}) + \text{ب ب} (\text{ج} + \text{ا}) + \text{ب ب} (\text{ا} + \text{ب})$$

$$= \text{ب ب} \frac{\text{ج} - \text{ا}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

$$۱۶- \text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲} = ۱ - \text{ج ب} \frac{۱}{۲} - \text{ج ب} \frac{۱}{۲} - \text{ج ب} \frac{۱}{۲}$$

$$۱۷- \text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲} - \text{ج ب} \frac{۱}{۲} = \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲} = \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲}$$

$$۱۸- \frac{\text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲}}{\text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲} + \text{ج ب} \frac{۱}{۲}} = \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲} \text{ج ب} \frac{۱}{۲}$$

$$۱۹- \text{ج ب} (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) + \text{ج ب} (\text{ج} + \text{ا} - \text{ب}) + \text{ج ب} (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})$$

$$= \text{ج ب} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۲$ ص ثوابت کرو کہ

$$۲۰- \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ا}) \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ب}) + \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ب}) \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ج}) = \text{ج ب} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

$$۲۱- \text{ج ب} \text{ص ج} (\text{ص} - \text{ا}) \text{ج ب} \text{ص ب} (\text{ص} - \text{ب}) \text{ج ب} \text{ص ج} (\text{ص} - \text{ج})$$

$$= ۱ - \text{ج ب} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲} - \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲} + \text{ج ب} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

$$۲۲- \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ا}) + \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ب}) + \text{ج ب} (\text{ص} - \text{ج}) - \text{ج ب} \text{ص}$$

$$= \text{ج ب} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲} \text{ج ب} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

۲۳۔ $\text{جم}^2\text{ص} + \text{جم}^2\text{ا} - \text{ص} - \text{ا} + \text{جم}^2\text{ص} - \text{ب} + \text{جم}^2\text{ص} - \text{ج}$

$$= ۲ + ۲ + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج}$$

۲۴۔ $\text{جم}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج} + ۲\text{جم}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج}$

$= ۱ + ۴\text{جم}^2\text{ص} + \text{جم}^2\text{ا} - \text{ص} - \text{ا} + \text{جم}^2\text{ص} - \text{ب} + \text{جم}^2\text{ص} - \text{ج}$

۲۵۔ اگر $\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} = ۲$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{جم}^2\text{ع} + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج} + \text{جم}^2\text{ل} + ۴\text{جم}^2\text{ع} + ۴\text{جم}^2\text{ب} + ۴\text{جم}^2\text{ج} + ۴\text{جم}^2\text{ل}$

(۲) $\text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج} + \text{جم}^2\text{ل} + ۴\text{جم}^2\text{ع} + ۴\text{جم}^2\text{ب} + ۴\text{جم}^2\text{ج} + ۴\text{جم}^2\text{ل}$

اور (۳) $\text{سس}^2\text{ع} + \text{سس}^2\text{ب} + \text{سس}^2\text{ج} + \text{سس}^2\text{ل}$

$$= \text{سس}^2\text{ع} + \text{سس}^2\text{ب} + \text{سس}^2\text{ج} + \text{سس}^2\text{ل} + ۴\text{سس}^2\text{ع} + ۴\text{سس}^2\text{ب} + ۴\text{سس}^2\text{ج} + ۴\text{سس}^2\text{ل}$$

۲۶۔ اگر چار زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰ ہو تو ثابت کرو کہ ان کی جیبوں

میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ ان کی جیب میں سے

کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔

۲۷۔ اگر $\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} = ۰$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جیب}^2\text{ع} + \text{جیب}^2\text{ب} + \text{جیب}^2\text{ج}$$

$$= ۲(\text{جیب}^2\text{ع} + \text{جیب}^2\text{ب} + \text{جیب}^2\text{ج}) + (\text{جم}^2\text{ع} + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج})$$

۲۸۔ اس کی تصدیق کرو کہ

جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج

+ جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج

اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کوئی زاوے ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۹۔ جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج

+ جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج + جیب^۲ا + جیب^۲ب + جیب^۲ج

۳۰۔ حب (ا-ب) جم (ا+ب) + حب (ب-ج) جم (ب+ج)

$$+ \text{جـ} (ج - د) + \text{جـ} (د + د) + \text{جـ} (د - ا) + \text{جـ} (د + ا) =$$

۳۱- جب (۱+ب-ج۲) بمب-جب (۱+ج-۲ب) بمب

$$= \text{میب (ب-ج)} + \text{م (ب+ج-ا-ب)} + \text{م (ج+ا-ب)} + \text{م (ا+ب-ج)}$$

۳۲۔ بب (ا + ب + ج + د) + جب (ا + ب - ج - د) + بب (ا + ب + ج + د)

$$+ \text{بب} (ا + ب + ج - د) = ۴ \text{ بب} (ا + ب) \text{ جم جم د}$$

۳۳۔ اگر کوئی مسند 'ا' ب' ج' کی ایسی قیمتوں کے لئے درست ہو جو

مسادات ۱ + ب + ج = ۱۸۰ کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ مسئلہ مذکورہ "اپ" ج

$$\frac{1}{2} - 2.11 \quad \frac{1}{2} - 2.11 \quad \frac{1}{2} - 2.11$$

(۲) ۱۰-۲، ۱۰-۲، ۱۰-۲ اور ۱۰-۲ ج

اس طرح مثال ۱۶ کو مثال ۶ سے اور مثال ۱۷ کو مثال ۵ سے متنبط کرو۔

اگر $l + m + n = 0$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{r_{5-5}}{r_{5-1}} + \frac{r_{6-6}}{r_{6-1}} + \frac{r_{7-7}}{r_{7-1}} = 33$$

$$\frac{y_1 - y_3}{y_3 - 1} \times \frac{y_2 - 1}{y_3 - 1} \times \frac{y_2 - y_3}{y_3 - 1} =$$

اور ۳۵۔ $u(1-i)(1-i) + i(1-i)(1-i) + i(1-i)(1-i) = 4m$ لای

۱۳۴۔ زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کی مدد سے خاص قسم

مثال۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{جب لا} + \text{جب لا} = \text{جب لا} = ۱۳$$

بوجب مناظرہ دفعہ ۱۰۰ مساوات اس طرح لکھی جا

$$۲ \text{ جب لا } ۳ \text{ جم لا } ۲ = \text{جب لا } ۳$$

$$\text{جب لا } ۳ = . \text{ یا } ۲ \text{ جم لا } ۲ = ۱$$

$$\text{جب لا } ۳ = . \text{ تو } ۳ \text{ لا } = \text{ن } ۲$$

$$\text{اگر } ۲ \text{ جم لا } = \frac{۱}{۲} \text{ تو } ۲ \text{ لا } = \text{ن } ۲ \pm \frac{۲}{۳}$$

$$\text{اس لئے لا } = \frac{\text{ن } ۲}{۳} \text{ یا } \text{ن } ۲ \pm \frac{۲}{۳}$$

۱۳۵۔ جن مساوات کی صورت عامہ اجمطہ + ب
ہو ان کا حل عام دریافت کرو۔

طرفین مساوات کو $\frac{۱}{\text{لا} + \text{ب}}$ پر تقسیم کرو اور مساوات کو اس

$$\frac{۱}{\text{لا} + \text{ب}} \text{ جم طہ} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} + \text{ب}} = \text{جب طہ} = \frac{\text{ج}}{\text{لا} + \text{ب}}$$

مساوات کی جدول سے اس زاوئے کی قیمت دریافت کر
ماس $\frac{۱}{\text{لا} + \text{ب}}$ ہو اور اس کو عد سے تعبیر کرو

$$\text{تب ماس } = \frac{\text{ب}}{\text{لا} + \text{ب}} \text{ اور}$$

$$\text{جب عد } = \frac{\text{ج}}{\text{لا} + \text{ب}} \text{ اور جم عد } = \frac{۱}{\text{لا} + \text{ب}}$$

مساوات بصورت ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\text{جم عد جم طہ} + \text{جب عد جب طہ} = \frac{\text{ج}}{\text{لا} + \text{ب}}$$

$$\text{یعنی جم (طہ - عد)} = \frac{\text{ج}}{\text{لا} + \text{ب}}$$

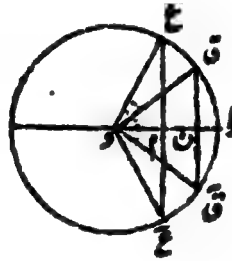
اس کے بعد جدولوں سے یا کسی اور طرح سے زاویہ بہ در یافتہ
جس کی جیب التمام $\frac{ج}{م} = \frac{ج}{م} = \frac{ج}{م}$ ہو یعنی جم = $\frac{ج}{م}$ $\frac{ج}{م}$ $\frac{ج}{م}$

[اور ہے کہ زاویہ بہ صرف اسی صورت میں معلوم ہو سکتا ہے جبکہ ج > م اور ج < م]

اس طرح سے مساوات مجوزہ جم (طہ - عہ) = جم بہ ہوگی
اور اس کا حل ہے طہ - عہ = ۲۵۲ + ۲۵ طہ بہ

یعنی طہ = ۲۵۲ + ۲۵ عہ بہ جہاں ن کوئی

صحیح عدد ہے ایسے زاوئے مثلاً عہ اور بہ جو مثلثی حسابات میں تسہیل
حل کے لئے داخل کئے جاتے ہیں امدادی زاوئے کہلاتے ہیں۔
۱۳۶۔ حل ترکیبی سے اوپر کے حل کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے



خط ابتدائی پر دم برابر ا کے تا پو اور و او پر عمود م ع برابر کے
قائم کرو تب زاویہ م و ع کا ماس $\frac{م}{ع}$ ہوگا اس زاویہ کو عہ سے
تبصیر کرو

و کے مرکز اور و ع مساوی م اور ج کے نصف قطر پر ایک دائرہ
بناؤ اور خط ابتدائی پر و ن برابر ج کے و
و ن پر عمود ق ن ق کھینچو اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو نقاط ق

اور قی پر ملتا ہے اس لئے زاوئے ن وق اور ن وق دونوں
جدا گانہ بہ کے برابر ہیں پس زاویہ قی وق = عدہ - بہ اور قی وق = عدہ بہ
اس لئے مساوات کے حل بالترتیب

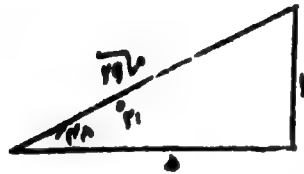
$$۲ن۲ + ق۲ وق اور ۲ن۲ + ق۲ وق ہوں گے۔$$

صریحاً اوپر کا حل نامکن ہوگا اگر ج کے $\sqrt{۱۰} + \sqrt{۲}$

کیونکہ اس صورت میں نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہوگا
۱۳۔ بطور ایک عددی مثال کے ہم مساوات ذیل کو حل کریں گے

$$۵ \text{ جم طہ} - ۲ \text{ جب طہ} = ۲ \text{، معلوم ہے مس } ۲۸۹۱ = \frac{۲}{۵}$$

طرفین مساوات کو $\sqrt{۱۰} + \sqrt{۲}$ یعنی $\sqrt{۲۹}$ پر تقسیم کر دو تو حاصل ہوگا



$$\frac{۲}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \text{ جب طہ} - \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \text{ جم طہ}$$

اس لئے جم طہ جم $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$ - جب طہ جب $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$

$$= \text{جب } \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} = \text{جب } (۹۰ - ۹۸ - ۱۲)$$

$$= \text{جم } ۹۸ - ۱۲$$

$$\text{جم } (۹۸ - ۱۲) = \text{جم } ۹۸ - ۱۲$$

$$\text{اس لئے طہ} + \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} = ۲۸۹۱ = ۲ن۲ \pm ۱۸۰ \pm ۱۲۹۸ \text{ (دفعہ ۸۹)}$$

$$\text{طہ} = ۲ن۲ \pm ۱۸۰ - ۱۲۹۸ \pm ۲۸۹۱$$

$$۲۳ \times ۲۶ + ۱۸۰ \times ۲۲ = ۹۰ - ۱۸۰ \times ۲۲$$

ن کوئی صحیح عدد ہے
متبادل ثبوت مساوات دفعہ ۱۳۵ ایک اور طرح سے بھی حل ہو سکتی ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ } م = مس \frac{۲}{۳}$$

$$\text{پس } \frac{۲}{م+۱} = \frac{مس \frac{۲}{۳}}{۱+مس \frac{۲}{۳}}$$

$$\text{اور } \frac{۲-۱}{م+۱} = \frac{۱-مس \frac{۲}{۳}}{۱+مس \frac{۲}{۳}} \quad (\text{دفعہ ۱۱۵})$$

مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے اس کی صورت یہ ہو جائے گی

$$۱ = \frac{۲-۱}{م+۱} + ۲ \frac{۲}{م+۱} = ج$$

$$\text{یعنی } م (ج + ۱) - ۲ = ۲ - ج + م = ۰$$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے جس سے م کی دو قیمتیں یعنی مس $\frac{۲}{۳}$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں مثلاً موافق مثال دفعہ ۱۲۵

$$۲۳ + م - ۳ = ۰ \quad \text{یعنی } م = ۱ - \frac{۲}{۳}$$

$$= مس (-۲۵) \quad \text{یا } مس ۲۳ \quad ۱۲ \quad (\text{جدولوں سے})$$

$$\text{اس لئے } \frac{۲}{۳} = ۲۵ - ۱۸۰ \times ۲۲ \quad \text{یا } ۲۳ + ۱۸۰ \times ۲۲$$

$$\text{یعنی } ۲۳ = ۲۶ - ۱۸۰ \times ۲۲ \quad \text{یا } ۲۳ + ۱۸۰ \times ۲۲$$

المثلثه نهمی ۲۱

سادات ذیل کو حل کرو

- ۱- جب ط + جب ط = جب ط = جب ط
- ۲- جم ط + جم ط = جم ط = جم ط
- ۳- جم ط + جم ط = جم ط = جم ط
- ۴- جب ط - جب ط = جب ط = جم ط
- ۵- جم ط - جب ط = جم ط = جم ط
- ۶- جب ط = جب ط + جب ط
- ۷- جم ط + جم ط + جم ط = .
- ۸- جب ط + جب ط + جب ط = .
- ۹- جب ط - جم ط - جب ط + جم ط = .
- ۱۰- جب (ط + ط) + جب (ط - ط) + جب (ط - ط) = جم ط
- ۱۱- جم (ط + ط) + جم (ط - ط) + جم (ط + ط) = جم (ط - ط) = جم ط
- ۱۲- جم ن ط = جم (ن - ط) ط + جب ط
- ۱۳- جب $\frac{ن + ۱}{ط}$ = جب $\frac{ن - ۱}{ط}$ ط + جب ط
- ۱۴- جب م ط + جب ن ط = .
- ۱۵- جم م ط + جم ن ط = .
- ۱۶- جب ن ط - جب (ن - ۱) ط = جب ط
- ۱۷- جب ط + جم ط = .

$$۱۸ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} + \text{جب ط} = \overline{۲۱}$$

$$۱۹ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} + \text{جب ط} = \overline{۲۱}$$

$$۲۰ - \overline{۲۱} = \text{جب ط} - \text{جم ط} = \overline{۲۱}$$

$$۲۱ - \overline{۲۱} = \text{جب لا} + \text{جم لا} = \overline{۲۱}$$

$$۲۲ - ۵ = \text{جب ط} + ۲ = \text{جم ط} = ۵ \text{ (معلوم ہے کس } ۱۲۸۸۲۸ = ۲۴۵)$$

$$۲۳ - ۶ = \text{جم لا} + ۸ = \text{جب لا} = ۹ \text{ (معلوم ہے کس } ۵۲۸ = ۸ \frac{۱}{۲})$$

اور جم ۲۵ = ۵۰ = ۱۹

$$۲۴ - ۱ = \text{جب ط} = ۳ = \text{جب ط} + \text{جم ط} \text{ (معلوم ہے کس } ۱۷۲۸ = ۲۴۵)$$

$$۲۵ - \overline{۲۱} = \text{قم ط} = \text{جم ط} + \overline{۲۱}$$

$$۲۶ - \overline{۲۱} = \text{قم لا} = ۱ + \text{جم لا}$$

$$۲۷ - (۲ + \overline{۲۱}) = \text{جم ط} = ۱ - \text{جب ط}$$

$$۲۸ - \overline{۲۱} = \text{س ط} + \text{قط ط} = \overline{۲۱}$$

$$۲۹ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} = \text{جم ط}$$

$$۳۰ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} - ۲ = \text{قط ط} = \text{س ط}$$

$$۳۱ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} + ۳ = \text{جم ط} = ۰$$

$$۳۲ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} + ۲ = \text{جم ط} = ۰$$

$$۳۳ - \overline{۲۱} = \text{جم ط} = (۱ + \overline{۲۱}) (\text{جم ط} - \frac{۱}{۲})$$

- ۳۴ - مم ط - مس ط = ۲
 ۳۵ - ۴ مم ۲ ط = مم ۲ ط - مس ۲ ط
 ۳۶ - ۳ مس (ط - ۱۵) = مس (ط + ۱۵)
 ۳۷ - مس ط + مس ۲ ط + مس ۳ ط = ۰
 ۳۸ - مس ط + مس ۲ ط + مس ۳ ط = مس ۴ ط
 ۳۹ - جب ۲ عہ = ۴ جب عہ جب (لا + عہ) جب (لا - عہ)
 ۴۰ - ثابت کرو کہ اگر لا کو ۲۱ جب ۵ مم ۲ جب ۱۸ مم ۲ جب ۳۳ مم ۲
 میں سے کسی ایک قیمت کے برابر رکھا جائے تو شرائط مساوات
 لا ۲ - لا ۱ + ۰ = ہر ایک صورت میں پوری ہوں گی -
 ۴۱ - اگر جب (۲ جم ط) = جم (۲ جب ط) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (ط} \pm \frac{1}{2} \text{)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

- ۴۲ - اگر جب (۲ مم ط) = جم (۲ مس ط) تو ثابت کرو کہ قسم ط
 لا مم ۲ ط مساوی ن + ۱/۲ کے ہے اس میں ن کوئی مثبت یا منفی
 صحیح عدد ہے -
 ۴۳ - مثال اگر لا صفر سے ۲۲ تک بڑھے تو جم لا
 جب لا + جم لا کے تغیرات کو قسم کرو -

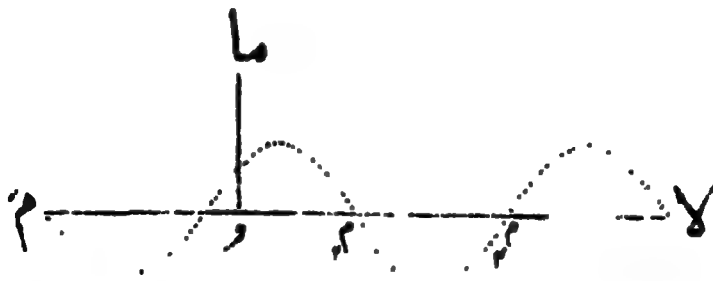
$$\text{جب لا + جم لا} = ۲۱ \left[\frac{1}{2} \text{ جب لا} + \frac{1}{2} \text{ جم لا} \right]$$

$$= ۲۱ \left[\text{جب لا جم لا} + \frac{1}{2} \text{ جم لا جب لا} + \frac{1}{2} \text{ جب لا} \right]$$

اس طرح سے ہجو قیمتوں کی جدول ذیل حاصل ہوگی

لا	۰	$\frac{\pi}{\pi}$	$\frac{\pi^3}{\pi}$	$\frac{\pi^5}{\pi}$	$\frac{\pi^7}{\pi}$	π^2
$\frac{\pi}{\pi} + لا$	$\frac{\pi}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi^3}{2}$	π^2	$\frac{\pi^9}{\pi}$
جب ($\frac{\pi}{\pi} + لا$)	$\frac{1}{\pi}$	۱	۰	۱	۰	$\frac{1}{\pi^2}$
ما جب ($\frac{\pi}{\pi} + لا$)	۱	π	۰	π^2	۰	۱

دفعہ ۶۸ کے عمل تعبیر کے موافق جلد مذکورہ کی ترسیم یہ ہوگی۔



۱۳۹۔ مثال۔ اجم ط + ب جب ط کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور جلد کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو

$$اجم ط + ب جب ط = \frac{لا + ب}{\pi} = \left[\frac{لا}{\pi} + \frac{ب}{\pi} \right] \text{ جب ط}$$

فرض کرو کہ عہ چوٹے سے چوٹا مثبت زاویہ ایسا ہے کہ

۳- جب ط - ۳۶ جم ط ۴- جم ط - جب ط

۵- جب ط جم ط ۶- جب ۳ ط

۷- مس ۳ ط ۸- قط ۲ ط

۹- جب (۲۲ جب ط) ۱۰- جب (۲۲ جب ط)

۱۱- جم (۲۲ جب ط) ۱۲- اگر زاویہ ۰ سے ۹۰ تک بڑھے تو جلد $\frac{\text{جب ۳ ط}}{\text{جم ۲ ط}}$ کی مقدار و

علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

باب دہم

لوکار تم

۱۔ فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

$$۲۱۴۰۳۱۲۵۱۰ \div ۲۵۳ = ۸۴۵۰۶$$

$$\text{اور } ۱۰۲۹۷۱ = ۵۹۰۱۲۷۱۳۹۱۰$$

تو عمل ضرب کی مدد کے بغیر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$۱۰۲۹۷۱ = ۸۴۵۰۶ \times ۲۵۳$$

$$۲۱۴۰۳۱۲۵۱۰ \times ۲۵۳ = ۸۴۵۰۶ \times ۲۵۳ \times ۲۵۳$$

$$۲۱۴۰۳۱۲۵۱۰ + ۲۱۴۰۳۱۲۵۱۰ =$$

$$۱۰۲۹۷۱ = ۵۹۰۱۲۷۱۳۹۱۰$$

ظاہر ہے کہ اس جگہ عمل ضرب اُس سے آسان تر عمل ہے
تبدیل ہو گیا ہے نیز فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$۷۹۵۰۷ = ۴۹۰۰۴۰۵۵$$

$$\text{اور } ۱۶۹۳۳۴۶۸۵ = ۴۹۰۰۴۰۵۵$$

ہم آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ ۷۹۵۰۷ کا جذر الکعب ۳۳ ہے
 کیونکہ $\sqrt[3]{79507} = 43 = [43.0] = \sqrt[3]{(33^3 + 3 \times 33 \times 10 + 10^3)}$

$$33^3 = 35937, 3 \times 33 \times 10 = 990, 10^3 = 1000, 35937 + 990 + 1000 = 47927$$

اس صورت میں استخراجِ جذر کا محالِ عمل آسان تر عملِ تقسیم میں تبدیل ہو گیا ہے۔

۱۴۱۔ نوکارِ رقم۔ تعریف اگر کوئی عدد ہو اور لا اور ن دو اور ایسے عدد ہوں کہ $لا = ن$ تو لا کو نوکارِ رقم کا اساس اور پر کہتے ہیں اور اس ربط کو اس طرح لکھتے ہیں نوک و ن اس لئے کسی عدد کا نوکارِ رقم اساس معلوم پر وہ قوت نما ہے جس کے موافق ضرور ہے کہ اساس کو اٹھایا جائے تاکہ حاصل عدد معلوم کے برابر ہو جائے۔

مثلاً چونکہ ۱۰ = ۱۰۰ اس لئے ۲ = نوک ۱۰۰

چونکہ ۱ = ۱۰۰۰ اس لئے ۵ = نوک ۱۰۰۰۰

چونکہ ۲ = ۱۶ اس لئے ۳ = نوک ۱۶

چونکہ $\frac{2}{8} = [\frac{1}{4}] = 2 = ۲$ اس لئے $\frac{2}{5} =$ نوک ۳

چونکہ $\frac{2}{9} = \frac{1}{4.5} = \frac{1}{3.5} = \frac{1}{2.5}$ اس لئے $\frac{3}{7} =$ نوک $(\frac{1}{14})$

یادداشت چونکہ ۱ = ۱ اس لئے ایک کا نوکارِ رقم کسی اساس پر ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

۴۴۱۔ اگر م اور ن کوئی حقیقی مقدار جبریہ ہوں تو قوانین ذیل جن کو قوت نماؤں کے قانون کہتے ہیں صادق آتے ہیں۔

$$(۱) \quad \text{وا} \times \text{وا} = \text{وا}^۲$$

$$(۲) \quad \text{وا} \div \text{وا} = \text{وا}^{-۱}$$

$$(۳) \quad (\text{وا})^۳ = \text{وا}^۳$$

ان کے مطابق لوکاریتھم کے تین اساسی قوانین مندرجہ ذیل

$$(۱) \quad \text{لوگ م ن} = \text{لوگ م} + \text{لوگ ن}$$

$$(۲) \quad \text{لوگ } \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{لوگ م} - \text{لوگ ن}$$

$$(۳) \quad \text{لوگ (م)}^{\text{ن}} = \text{ن لوگ م}$$

ان کے ثبوت ذیل کلی وفعات میں دئے گئے ہیں۔

۴۴۲۔ دو مقداروں کے حاصل ضرب کا لوکار

لوکاریتھم کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\text{لوگ (م ن)} = \text{لوگ م} + \text{لوگ ن}$$

$$\text{فرض کرو کہ لا} = \text{لوگ م یعنی وا} = \text{م}$$

$$\text{اور ما} = \text{لوگ ن یعنی ونا} = \text{ن}$$

$$\text{تب م ن} = \text{وا} \times \text{ونا} = \text{وا+ونا}$$

$$\therefore \text{لوگ م ن} = \text{لا} + \text{ما} \quad (\text{دفعہ ۱۴۱ تعریف})$$

۱۴۴۔ دو مقداروں کے خارج قسمت کا لوکارتم اُن کے لوکارتموں کے حاصل تقریب کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\text{لوک (ج)} = \text{لوک ا م} - \text{لوک ر ن}$$

فرض کرو کہ لا = لوک ا م یعنی لا = م (دفعہ ۱۴۱ تعریف)
اور ما = لوک ر ن یعنی ما = ن

$$\text{تب ج} = \text{ا} \div \text{ا} = \text{ا} - \text{ا}$$

$$\therefore \text{لوک (ج)} = \text{لا} - \text{ا} \quad (\text{دفعہ ۱۴۱ تعریف})$$

$$= \text{لوک م} - \text{لوک ر ن}$$

۱۴۵۔ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو کسی خاص قوت پر اٹھائی گئی ہو مساوی ہے اُس حاصل ضرب کے جو مقدار کے لوکارتم اور قوت نما کے باہم ضرب دینے سے حاصل ہو یعنی

$$\text{لوک (م)} = \text{ن لوک ا م}$$

فرض کرو کہ لا = لوک ا م یعنی لا = م
تب م = (ا) = ا

$$\therefore \text{لوک (م)} = \text{ن لا} \quad (\text{دفعہ ۱۴۱ تعریف})$$

$$= \text{ن لوک ا م}$$

امثلہ لوک ۸ = لوک (۲ × ۴) = لوک ۲ + لوک ۴ = ۳ لوک ۲ + لوک ۲

$$\text{لوک } \frac{۶۳}{۳۸۳} = \text{لوک } \frac{۲۴۴}{۹۱۲۲} = \text{لوک } ۷ + \text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۱۱$$

$$= \text{لوک } ۷ + \text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۱$$

$$\text{لوک } \frac{۱}{۳۱} = \text{لوک } \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \text{ لوک } ۳۱$$

۱۴۶۔ مروج لوکارتم علیات میں جو لوکارتم مستقل ہیں اُن میں اساس ۱۰ مقرر ہے، پس اگر کوئی اساس بیان نہ کیا جائے تو اساس ۱۰ کو ہمیشہ مخدوف خیال کرنا چاہئے، اساس ۱۰ کے فوائد دفعات ذیل سے معلوم ہوں گے۔

۱۴۷۔ متمیز اور اعشاریہ لوکارتمی۔ تعریف اگر کسی حد کے لوکارتم کا کچھ حصہ صحیح اور کچھ حصہ مکسور ہو تو لوکارتم کے حصہ صحیح کو متمیز اور حصہ اعشاریہ کو اعشاریہ لوکارتمی کہتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ لوک $۷۹۵ = ۳۴۷۱۰۰۹۰۰۲$ تو عدد ۲ کو لوکارتم کا متمیز اور ۳۴۷۱۰۰۹۰۰ کو اعشاریہ لوکارتمی کہیں گے۔

منفی متمیز۔ فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ لوک $۲ = ۱۳۰۰۳۳$

تب بموجب دفعہ ۱۴۴

$$\text{لوک } \frac{۱}{۲} = \text{لوک } ۱ - \text{لوک } ۲ = ۰ - \text{لوک } ۲ = -۱۳۰۰۳۳$$

جس سے معلوم ہوا کہ لوک $\frac{۱}{۲}$ منفی ہے

جیسہ دفعہ ۱۴۹ سے معلوم ہوگا اس میں خاص سہولت ہے کہ لوکارتوں کے اعشاریوں کو ہمیشہ مثبت رکھا جائے۔

اس لئے بجائے -۱۳۰۰۳۳ کے ہم -۱۳۰۰۳۳ [۱-۴۹۸۹۷] لکھتے ہیں

یعنی لوک $\frac{1}{2} = (1 - 1/49896) \times 2 = 1 + 1/49896$

اختصاراً اس جملہ کو $1/49896$ کہتے ہیں۔

عدد ۱ کے اوپر خط افقی یہ ظاہر کرتا ہے کہ لوکارتم کا صحیح حصہ منفی ہے لیکن اعشاریہ لوکارتمی مثبت ہے۔

ایک اور مثال لو $1/49896$ و $1/49896$ قائم مقام $-3 + 1/49896$ کا ہے۔

۱۴۸۔ کسی عدد کے لوکارتم کا امتیز صرف دیکھنے ہی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ عدد ایک سے بڑا ہے۔

چونکہ $1 = 1.0$ اس لئے لوک $1 = 1.0$ ۔

چونکہ $1.0 = 1.0$ اس لئے لوک $1.0 = 1.0$ ۔

چونکہ $1.0 = 1.0$ اس لئے لوک $1.0 = 1.0$ ۔

اور علیٰ ہذا قیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ جو عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو

اُس کا لوکارتم صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا یعنی لوکارتم

ایک کسر اعشاریہ ہوگا۔

اس لئے اس کا امتیز صفر ہوگا

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم

۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اس کا امتیز ایک ہوگا

اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا

لوکارتم ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا امتیز ۲ ہوگا

ایسے ہی اگر عدد ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰ کے درمیان واقع ہو تو اس کا میز ۳ ہوگا اور بالعموم کسی عدد کے لوکارتم کا میز ان ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصہ میں شامل ہوں بقدر ایک کے کم ہوگا

امثلہ عدد ۲۹۹۱۳۲۵۴ کے صحیح حصہ میں ۳ ہندسے ہیں اس لئے اسکے لوکارتم کا میز ۲ ہے

۲۹۹۱۳۲۵۴ کے لوکارتم کا میز ۵-۱ یعنی ۲ ہے

(۲) فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہے

چونکہ $1 = \frac{1}{1}$ اس لئے لوگ $1 = 0$

" $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ اس لئے لوگ $1 = 0$

" $\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$ اس لئے لوگ $1 = 0$

" $\frac{1}{1000} = \frac{1}{1000}$ اس لئے لوگ $1 = 0$

اور علیٰ ہذا القیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو تو اس کا لوکارتم صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا پس لوکارتم مطلوب ۱- + ایک کسر اعشاریہ کے برابر ہوگا یعنی اس کا میز آ ہوگا۔

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم ۱- اور ۲- کے درمیان واقع ہوگا اور اس لئے وہ

۲- + ایک کسر اعشاریہ کے برابر ہوگا یعنی اس کا میز ۲ ہوگا اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا

۲۔ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا میز ۳ ہوگا
لوگم ہوا کہ کسی کسر اعشاریہ کے لوکار تم کا میز منفی ہوتا ہے اور
ت اعشاریہ کے بعد پہلے ملحوظ بند سے تک جتنے صفر ہوں
ن سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے۔

۱ کسر اور ۱ کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۰.۵) اُس میں علامت
یہ کے بعد کوئی صفر نہیں ہو سکتا اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا
ہے ' نیز جو کسر ۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہو مثلاً (۰.۷۵)
میں عین علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہوگا اور ہم
تے ہیں کہ اس کا میز ۲ ہے۔

۱.۵ اور ۱.۵ کے درمیان واقع ہو مثلاً (۱.۰۰۳) اس میں
علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہونگے، اور ہم کو معلوم ہے
س کا میز ۳ ہے کسی اور کسر کی بھی یہ ہی کیفیت ہے۔

عد ۰۰۸۳۵ کے لوکار تم کا میز ۴ ہے

عد ۰۰۰۰۰۵۳ کے لوکار تم کا میز ۵ ہے

عد ۰۳۲۵۶۷ کے لوکار تم کا میز ۶ ہے

۱۱۔ جن عددوں کی ترکیب میں وہی ہند سے شامل ہوں
کے اعشاریہ لوکار تہی وہی ہوتے ہیں۔
کی توضیح ایک مثال سے ہوگی۔

ن کر دو کہ ہمیں معلوم ہے

$$۴۵۸۲۳۸۹۳۵ = ۴۶۸۱۸$$

$$۴۶۸۱۸ = ۴۶۸۱۸ \div ۱۰۰ = ۴۶۸۱۸ \div ۱۰۰ = ۴۶۸۱۸ \div ۱۰۰ = ۴۶۸۱۸ \div ۱۰۰$$

$$۲۵۸۲۴۸۹۳۵ = ۲ - ۲۵۸۲۴۸۹۳۵ =$$

$$\text{لوک } ۴۴۸۱۸ = \text{لوک } \frac{۴۴۸۱۸}{۱۰۰۰۰۰} = \text{لوک } ۴۴۸۱۸ - \text{لوک } ۱۰۰۰۰۰ \text{ (دفعہ ۱۲۲)}$$

$$۲۵۸۲۴۸۹۳۵ = ۵ - ۲۵۸۲۴۸۹۳۵ =$$

$$\text{نیز لوک } ۴۴۸۱۸ = ۵۰۰۰۰۰ \text{ لوک } \frac{۴۴۸۱۸}{۱۰}$$

$$۲۵۸۲۴۸۹۳۵ = ۸ - ۲۵۸۲۴۸۹۳۵ = ۱۰ \text{ لوک } ۴۴۸۱۸$$

اب اعداد ۴۴۸۱۸، ۴۴۸۱۸، ۴۴۸۱۸ اور ۴۴۸۱۸۰۰۰ میں ملحوظ ہندسے وہی ہیں صرف علامت اعشاریہ کے مقام میں فرق ہے ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اُن کی لوکارتموں میں حصہ اعشاریہ وہی ہے صرف میز مختلف ہیں۔

ہر ایک صورت میں میز کی قیمت قانون دفعہ گزشتہ کی مدد سے معلوم ہوتی ہے۔

یاد رہے کہ لوکارتم کا اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

۱۵۰۔ لوکارتمی جدولیں اسے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چمبر صاحب کی لوکارتمی جدولوں میں مندرج ہیں اور یہ قیمتیں سات مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح ہیں۔

طالب علم کے پاس چمبر کی جدول یا کسی اور اچھی جدول کا ایک نسخہ موجود ہونا چاہیئے آئندہ چند بابوں میں کئی مثالیں حل کرنے میں اس کی ضرورت ہوگی۔

مقابل کے صفحہ پر چمبر کی جدولوں سے ایک صفحہ بطور نمونہ کے منتخب کیا گیا ہے اس میں ۵۲۵۰۰ سے لیکر ۵۳۰۰۰ تک تمام اعداد صحیح کے اعشاریہ لوکارتمی مندرج ہیں۔

رق	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	.	عدد
٨٢	٤٢٢	٤٩٠	٤٤٢٤	٤٧٥٥	٤٥٤٢	٤٢٩١	٤٢٠٨	٤٢٢٢٤	٤٢٢٢٢	٤١٧٢	٥٢٨١
٨٢	<u>٨٤٢٢</u>	٨٧٢٢	٨٥٥٩	٨٢٤٤	٨٢٩٥	٨٢١٢	٨٢٢١	٨١٢٨	٨٠٧٧	٤٩٨٢	٨٢
٨٢	٩٥٢٧	٩٢٧٢	٩٢٨٢	٩٢٩٩	٩٢١٤	٩١٢٥	٩٠٥٢	٨٩٤١	٨٨٨٨	٨٨٠٧	٨٢
٨٢	<u>٠٢٧٨</u>	<u>٠٢٨٧</u>	<u>٠٢٠٢</u>	<u>٠١٢١</u>	<u>٠٠٢٩</u>	<u>٩٩٥٤</u>	٩٨٤٥	٩٤٩٢	٩٤١٠	٩٧٢٨	٨٢
٨٢	٤٢٢	١١٨٩	١١٠٤	١٠٢٥	٠٩٢٢	٠٨٧١	٠٤٤٩	٠٧٩٧	٠٧١٢	٠٥٢٢	٨٥
٨٢	٢٠١١	١٩٢٩	١٨٢٤	١٤٧٥	١٧٨٢	١٧٠٠	١٥١٨	١٢٢٧	١٣٥٢	١٢٤٢	٨٧
٨٢	٢٨٢٢	٢٤٥٠	٢٧٧٨	٢٥٨٧	٢٥٠٢	٢٢٢٢	٢٢٢٠	٢٢٥٤	٢١٤٥	٢٠٩٢	٨٤
٨٢	٢٧٥٢	٢٥٤١	٢٢٨٩	٢٢٠٤	٢٢٢٥	٢٢٢٢	٢١٧١	٢٠٤٩	٢٩٩٤	٢٩١٢	٨٧
٨٢	٢٢٤٥	٢٢٩٢	٢٢١٠	٢٢٢٨	٢٢٢٧	٢٠٧٢	٢٠٩٨٢	٢٢٩٠٠	٢٢١٨	٢٢٤٢٧	٨٧
٨٢	٥٢٩٧	٥٢١٢	٥١٢١	٥٠٢٩	٢٩٧٤	٢٨٨٥	٢٨٠٢	٢٤٢١	٢٧٢٩٩	٢٥٥٤	٩٠

نیز عدد ۵۲۷۲۵ کا میز ۴ ہے

اس لئے لوک $۴۷۷۲۲۰۱۶۶ = ۵۲۷۲۵$

پس لوک $۴۷۷۲۲۰۱۶۶ = ۵۰۵۲۷۲۵$

اب ہم چند عددی مثالیں حل کریں گے جن سے علی حسابات میں

لوکارتم کے استعمال کی صلاحیت واضح ہوگی

۱۵۲۔ مثال ۱۔ نمبر ۲۳۲۳ کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ لا = نمبر ۲۳۲۳ = $\frac{1}{5}(۲۳۲۳)$

یعنی لوک لا = $\frac{1}{5}$ ۔ لوک (۲۳۲۳) ... دفعہ ۱۳۵

اب جدول لوکارتمی میں عدد ۲۳۳ کے محاذی ہم کو اس کا لوکارتم ۳۹۹۲۱۵۹

لکھا ہوا۔ لے گا۔

اس لئے لوک $۱۷۳۹۹۲۱۵۹ = ۲۳۲۳$

اس لئے لوک لا = $\frac{1}{5}$ ۔ $۱۷۳۹۹۲۱۵۹ = ۲۷۷۳۸۳۳۲$

نیز لوکارتم ۲۷۷۳۸۳۳۲ کے متعلق جدول سے عدد ۱۸۷۸۶۴ لے گا پس

لوک $۱۷۷۸۶۴ = ۲۷۷۳۸۳۳۲$

لا = ۱۷۷۸۶۴

مثال ۲۔ $\frac{۵(۶۷۴۵) \times ۳(۷۰۰۰۳۳)}{۸۷۹۳(۹۷۳۷)}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ لا قیمت مطلوب ہے اس لئے بموجب دفعات ۱۳۴ اور ۱۳۵

لوک لا = لوک (۶۷۴۵) + لوک (۷۰۰۰۳۳) - لوک (۹۷۳۷) - لوک (۸۷۹۳)

= ۳ لوک (۶۷۴۵) + $\frac{1}{4}$ لوک (۷۰۰۰۳۳) - ۲ لوک (۹۷۳۷) - $\frac{1}{4}$ لوک (۸۷۹۳)

اب جدولوں سے معلوم ہوگا کہ

عدد ۶۴۵ کے محاذی لوکارتم ۸۰۹۵۵۹۷

" ۵۳۱۳۷۸۹ " " ۳۴ "

" ۹۷۱۷۳۹۶ " " ۹۳۷ "

" ۹۵۰۸۵۱۵ " " ۸۹۳ "

اس لئے

لوک لا = $\frac{1}{10} + ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۳ = (۸۰۹۵۵۹۷ + ۲)$

$۸۰۹۵۵۹۷ \times \frac{1}{10} - ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۲ =$

لیکن $\frac{1}{10} = (۸۰۹۵۵۹۷ + ۲) \times \frac{1}{10}$

$۸۰۹۵۵۹۷ + ۲ =$

اس لئے لوک لا = $۸۰۹۵۵۹۷ + ۲ + ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۲ =$

$۸۰۹۵۵۹۷ - ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۲ =$

$۸۰۹۵۵۹۷ - ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۲ =$

$۸۰۹۵۵۹۷ - ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۲ =$

$۸۰۹۵۵۹۷ =$

جدولوں سے عدد ۱۲۳۴ کے مقابل لوکارتم ۰۹۱۳۱۵۲ لکھا ہوا ہے گا

پس

لوک $۸۰۹۵۵۹۷ = ۱۲۳۴$

اس لئے لوک لا = لوک ۱۲۳۴ تقریباً

اور اس لئے لا = ۱۲۳۴ تقریباً

جب کسی عدد کا لوکارتم جدول کے کسی لوکارتم کے بالکل مطابق نہ ہو لیکن

دو متصل لوکارتموں کے درمیان واقع ہو تو اس صورت میں بھی عدد

ہو سکتا ہے اس کا بیان اگلے باب میں ہوگا۔

مثال ۳۔ معلوم ہے لوک $2 = 30.103$

عدد 2^4 میں ہندسوں کی تعداد اور 2^4 میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو۔

لوک $2^4 = 46 = 2$ لوک $30.103 \times 46 = 2.0149.01$

چونکہ 2^4 کے لوکارتم کا میز ۲۰ ہے اس لئے بوجب دفعہ ۱۴۸ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ 2^4 میں ۲۱ ہندسے ہیں

نیز لوک $2^4 = 34 = 2$ لوک $30.103 \times 34 =$

$$12.86189 = 11.3811 = 3$$

اس لئے بوجب دفعہ ۱۴۸ اور 2^4 میں علامت اعشاریہ کے بعد ۱۱ صفر ہیں اس سے معلوم ہوا کہ پہلا ملحوظ ہندسہ کسر اعشاریہ میں بارہویں مقام پر ہے

مثال ۴۔ معلوم ہے لوک $3 = 5441213$

لوک $4 = 845.980$ اور لوک $11 = 15.113924$

مسادات $3 \times 4 = 12 = 11$ کو حل کرو

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوگا

$$\text{لوک } 3 + \text{لوک } 4 = 12 = \text{لوک } 11$$

$$\therefore \text{لا } \text{لوک } 3 + (1 + 12) = \text{لوک } 4 = (5 + 11) \text{ لوک } 11$$

$$\therefore \text{لا } [\text{لوک } 3 + 2 \text{ لوک } 4 - \text{لوک } 11] = 5 \text{ لوک } 11 - \text{لوک } 4$$

$$\therefore = \frac{5 \text{ لوک } 11 - \text{لوک } 4}{\text{لوک } 3 + 2 \text{ لوک } 4 - \text{لوک } 11}$$

$$= \frac{5845.980 - 552.49435}{15.313924 - 1549.1940 + 5441213}$$

$$۳۶۸۷ \dots = \frac{۲۵۳۶۱۸۶۵۵}{۱۵۱۲۵۹۲۴۶}$$

۱۵۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک م} = \text{لوک پ م} \times \text{لوک ب}$$

فرض کرو کہ $\text{لوک م} = \text{لا}$ یعنی $\text{لا} = \text{م}$
 نیز فرض کرو کہ $\text{لوک پ م} = \text{ما}$ یعنی $\text{ما} = \text{پ م}$
 ∴ $\text{لا} = \text{ب}$

اس لئے $\text{لوک (لا)} = \text{لوک (ب)}$

∴ $\text{لا} = \text{ما لوک ب}$ (وقعہ ۱۴۵)

اس لئے $\text{لوک م} = \text{لوک پ م} \times \text{لوک ب}$

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ جب کسی عدد کا لوکار تم اساس ب پر معلوم ہو تو مسئلہ مندرجہ بالا کی اعانت سے ہم اُسی عدد کا لوکار تم کسی اور اساس لا پر دریافت کر سکتے ہیں، اگلے باب سے معلوم ہوگا کہ لوکارتموں کو بلا واسطہ اساس ۱۰ کے موافق نہیں نکالنا چاہیئے بلکہ اس میں زیادہ سہولت ہے کہ ان کو سب سے اول ایک اور اساس کے موافق نکالا جائے اور پھر اس مسئلہ کی مدد سے انکو اساس ۱۰ میں منتقل کر دیا جائے۔

امثلہ نمبری ۳۳

- ۱۔ اگر لوک ۳ = ۶۰۲۰۶ اور لوک ۳ = ۱۲۱۳ = ۴۷۷
تو ۸، ۳۰۰، ۱۰۸، ۱۰۸ اور (۱۸۰۰۰) کے لوکارتم دریافت کرو
- ۲۔ معلوم ہے لوک ۱۱ = ۱۳۹۲۷ اور لوک ۱۳ = ۱۳۹۳۳۳ اور
مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو
(۱) لوک ۱۳ اور (۲) لوک ۱۳ اور (۳) لوک ۱۳ اور
(۴) لوک ۱۴ اور
- ۳۔ ۲۳۳۷، ۱۵۳، ۲۸۷۱۳، ۵۷۷، ۰۰۰، ۰۰۰، ۰۰۰
اور ۲۳۷۱۵ اور (۲۳۷۱۹) کے لوکارتموں کے میز دریافت کرو
۴۔ عدد ۰۰۳ کا پانچواں جذر دریافت کرو
معلوم ہے لوک ۳ = ۱۲۱۳ = ۴۷۷ اور
لوک ۳۱۲۹۳۶ = ۵۴۹۵۴۲۳۳
- ۵۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو
(۱) ۱/۲ (۲) (۸۴) اور (۳) (۲۱) ۱/۲
معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ۱۲۱۳ = ۴۷۷
لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ اور لوک ۱۳۲۰۵۷ = ۱۲۰۷۲۸۳
لوک ۵۸۸۴۵۳ = ۵۷۷۷۷۷ اور لوک ۲۶۱۷۹۱ = ۶۶۴۴۴۳۸
- ۶۔ معلوم ہے لوک ۳ = ۱۲۱۳ = ۴۷۷
مفصلہ ذیل میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو
(۱) ۳ (۲) ۳ اور (۳) ۳

اور اعداد ذیل میں پہلے ملحوظ ہند سے کا مقام دریافت کرو

$$(۴) ۱۳-۳۳ \quad (۵) ۳۳-۳۳ \quad \text{اور} \quad (۶) ۳۳-۳۳$$

۷- معلوم ہے لوک $۳۳-۱۰۳=۲$ اور لوک $۳۳-۲۱۳=۳$ اور

$$\text{اور لوک } ۳۳-۵۸۰=۴$$

معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) \quad ۲ = ۳^{۱+۲} \times ۳^{۲}$$

$$(۲) \quad ۲ = ۳^{۲+۳} \times ۳^{۱+۲}$$

$$(۳) \quad ۳ = ۳^{۲} \div ۳^{۱}$$

$$(۴) \quad \begin{cases} ۹ = ۳^{۱+۲} \times ۳^{۱+۲} \\ ۳ = ۳^{۲-۱} \div ۳^{۱} \end{cases}$$

۸- جدولوں کی مدد سے ۵۱۶۷۰۰۰۰ کا ساتواں جند دریافت کرو

نو کارتی جدولوں کی مدد سے مفصلہ ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

$$۹- \sqrt[۳]{۶۴۵۱۳} \quad ۱۰- \sqrt[۴]{۸۲۳۵۷}$$

$$۱۱- \sqrt[۳]{\frac{۷۲ \times ۵۲}{۹۸ \times ۸۲}} \quad ۱۲- \sqrt[۴]{\frac{۸۵۳ \times ۷۲}{۱۶۵ \div ۹۵۲}}$$

$$۱۳- \sqrt[۴]{\frac{۷۲ \times ۸}{۹۲ \times ۷۲}}$$

جملات ذیل کی ترسیات کھینچو ۱۴- لوک لا ۱۵- لوک جب لا

۱۶- لوک جم لا ۱۷- لوک مس لا

۱۸- لوک قم لا ۱۹- لوک مم لا

باب یازدہم

لوکارتموں اور مثلثی نسبتوں کی جدولیں

اصول اجزائے مناسب

۱۵۴۔ اوپر اس کا ذکر آچکا ہے کہ اسے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چمبر صاحب کی جدول حسابیہ میں مندرج ہیں مثلاً اعداد ۷۴۵۸۳ اور ۷۴۵۸۴ کے لوکارتم بلا واسطہ ان جدولوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مگر فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے عدد کا لوکارتم مطلوب ہے جو ان دو عددوں کے درمیان واقع ہے مثلاً ایک ایسا عدد ۷۴۵۸۳۵۳ ہے۔ اس عدد کا لوکارتم معلوم کرنے کے لئے ہم اصول اجزائے مناسب سے مدد لیتے ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی عدد کے لوکارتم کی افزائش خود اس عدد کی افزائش کے متناسب ہوتی ہے۔

مثلاً جدولوں سے حاصل ہوگا

$$\text{لوک } ۷۴۵۸۳ = ۴۶۳۹۸۲۷۸ \dots (۱)$$

اور لوک $۶۴۵۸۳ = ۴۵۸۳۳۳۳$
 اب مقدار لوک ۶۴۵۸۳۳۳ صریحاً لوک ۶۴۵۸۳
 لوک ۶۴۵۸۳ کے درمیان واقع ہوگی۔
 فرض کرو کہ لوک $۶۴۵۸۳۳۳ =$ لوک $۶۴۵۸۳ + ۹$

$۴۵۸۳۳۳۳ + ۹ =$ لا
 (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ جب عدد کی زیادتی ایک ہوتی
 کی زیادتی $۵۹ \dots\dots\dots$ ہوتی ہے۔
 اب مسئلہ اجزائے مناسب کا منشا یہ ہے کہ عدد کی زیادتی
 واسطے لوکار تم کی زیادتی $۳ \times ۵۹ \dots\dots\dots$ یعنی ۱۷۷
 اس لئے لوک $۶۴۵۸۳۳۳ = ۴۵۸۳۳۳۳ + ۶۷$

$$۴۵۸۳۳۳۳ + ۱۵۷ =$$

۱۵۵۔ بطور ایک اور مثال کے ہم لوک ۳۸۲۷۵۷
 قیمت دریافت کریں گے اور عمل کو ایک مختصر صورت میں
 دیں گے۔

جددوں سے حاصل ہوگا۔

$$\text{لوک } ۳۸۲۷۵۷ = ۳۸۲۹۱۵۲$$

$$\text{لوک } ۳۸۲۷۵۷ = ۳۸۲۹۲۴۵$$

$$۱۱۳ = ۱۱۳ \dots\dots\dots \text{ اس لئے فرق متعلقہ}$$

$$۱۱۳ \times ۶۷ = ۷۶۷۱ \dots\dots\dots$$

$$۷۶۷۱ =$$

∴ لوک $255829152 = 1.382456$

$5.00000491 +$

$2558292311 =$

اب چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک لوکارتموں کی ضرورت ہے اس لئے ہم آخری ہندسے کو حذف کرتے ہیں

پس جواب مطلوب 255829231 ہے

۱۵۶۔ اوپر کے سوال کا عکس یہ ہے "ایک عدد کا لوکارتم معلوم ہے وہ عدد دریافت کرو" اکثر عملی حسابات میں اس سوال کا حل مطلوب ہوتا ہے۔

اب اگر دیا ہوا لوکارتم جدول میں موجود ہو تو عدد باسانی حاصل ہو سکتا ہے مگر جب ایسا نہ ہو تو طریق عمل کی توضیح مثلاً ذیل سے ہوگی۔

ایک عدد کا لوکارتم 254283923 ہے اس کو معلوم کرو

جدولوں میں تلاش کرنے سے معلوم ہوگا کہ لوکارتم 4283923 جدول

میں موجود نہیں لیکن اس کے قریب ترین لوکارتم 4283889 اور

4283991 موجود ہیں اور ان کے درمیان لوکارتم معلوم واقع ہے۔

پس لوک $254283889 = 2255.00$ (۱)

اور لوک $254283991 = 2255.01$ (۲)

فرض کرو کہ لوک $254283923 = (2255.00 + 0.01)$ (۳)

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ عدد کے فرق ۰.۰۱ کے مطابق لوکارتم کا فرق

5.0000102 ہے۔

نیز (۱) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ عدد کے فرق لا کے مطابق لوکارتم کا فرق ۳۵ ۱ ہے۔

اس لئے ہمیں حاصل ہوگا

$$لا : ۵۰۱ = ۳۵ : ۱۰۲ ۵$$

$$\therefore لا = \frac{۳۵}{۱۰۲} \times ۵۰۱ = \frac{۱۷۵۵}{۱۰۲} = ۱۷.۲۰۵۸۸ تقریباً$$

اس لئے عدد مطلوب = ۱۷.۲۰۵۸۸ + ۳۲۳ = ۳۴۰.۷۰۵۸۸

۱۵۷ = جب لوکارتموں کو جدولوں سے لیا جائے تو مستقل لوکارتموں کو ایک دوسرے سے منفی کرنیکی محنت سے ہم اس طرح بچ سکتے ہیں۔

صفحات ۲۱۳ تا ۲۱۷ کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ بائیں طرف کے آخری خانے کے سر پر فرق لکھا ہوا ہے اور سب سے اوپر عدد ۸۲ ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ صفحہ مذکورہ پر جو اعداد ہیں اگر ان کا فرق ایک ہو تو ان کے متعلقہ لوکارتموں کا فرق ۸۲ ہوتا ہے کیونکہ عدد ۸۲ دراصل قائم مقام ۸۲ کا ہے

۸۲ کے نیچے متواتر سطروں میں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه' کے متعلقہ فرق دئے ہوئے ہیں مثلاً پانچویں سطر میں ۵ کے مطابق فرق ۳۱ ہے۔

بطور ایک مثال کے ۵۲۷۴۵۷ کا لوکارتم دریافت کرو صفحہ (۲۱۵) پر لوگ ۵۲۷۴۵ = ۴۵۷۲۲۱۸۹۵

فرق ۷ کے لئے = ۵۷۰۰۰۰۰

فرق ۴ کے لئے

$$\left(\frac{1}{15} \times \text{فرق شعلقہ} \right) = ۳۰۰۰۰۰$$

$$\therefore \text{لوک} = ۵۲۷۴۶۵۷۳ = ۳۵۷۲۲۱۹۵۵$$

اب ہم دو اور مثالیں حل کریں گے جن میں تمام لوکار رقم جدولوں سے لئے جائیں گے اور صرف ضروری عمل مندرج ہوگا۔

مثال ۱۔ ۵۰۳۴۵۷۳ کا ساتواں جذر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا مقدار مطلوبہ ہے تب

$$\text{لوک} ۱ = \frac{1}{2} = \text{لوک} (۱۰۳۴۵۷۳) = \frac{1}{2} (۲۵۳۸۷۴۹۶)$$

$$= \frac{1}{2} (۵۵۳۸۷۴۹۶ + ۲)$$

$$\therefore \text{لوک} ۱ = ۲۷۷۹۱۲۴۹۹$$

$$\text{لیکن لوک} ۱ = ۲۷۷۹۱۲۴۸۳ = ۲۷۷۹۱۲۴۹۹$$

$$\text{فرق} = ۱۵۰۰۰۰۰$$

$$\text{لیکن فرق } ۱۰۰۰۰۰ = \text{کیلئے } ۷۰۰۰۰۰$$

$$\text{اسلئے مطلوبہ زیادتی} = ۲۱۱۰۰۰۰$$

$$\text{اس لئے لا} = ۲۷۷۹۱۲۴۸۳$$

مثال ۲۔ اگر $۳۴۵۶۲۷۷۳ =$ اور $۲۸۳۴۷۹۱۲ =$ تو

۱۔ با کے جذر المربع کی قیمت دریافت کرو۔

اگر لا مقدار مطلوبہ ہو تو ۲ لوک لا = لوک (با - ۱)

$$= \text{لوک} (با - ۱) + \text{لوک} (با + ۱) = \text{لوک} ۲۸۳۴۷۹۱۲ + \text{لوک} ۲۸۳۴۷۹۱۲$$

$$\text{اب لوک} ۲۸۳۴۷۹۱۲ = ۳۷۷۹۱۲۴۸۳$$

$$\begin{array}{r} ۷ \\ ۵۷۴ = ۸ \end{array}$$

$$\text{اس لئے لوک} ۲۸۳۴۷۹۱۲ = ۳۷۷۹۱۲۴۸۳$$

لوک	۶۲۹۱۰۵۰۰۰	۳۱۷۹۸۷۱۹۷
	۹	۳۱
	۳	۲۸
	۲	۱۴

لوک ۲ ۶۲۹۱۰۵۴۳ = ۳۱۷۹۸۷۱۹۷

۱۔ اسلئے جمع کرنے سے ۲ لوک لا = ۸۵۵۹۲۱۵۲۵

اس لئے ۳ لوک لا = ۳۱۷۹۸۷۱۹۷

لیکن ۳ لوک لا = ۱۹۷۷۳۱۹۸

∴ فرق = ۳۷

لیکن فرق ۱ کے لئے = ۲۲۰

۱۔ اسلئے متناسب زیادتی = $۱ \times \frac{۳۷}{۲۲۰}$

∴ لا = ۱۹۷۷۳۱۹۸

۱۵۸۔ اس جگہ اصول اجزائے متناسب کا ثبوت نہیں دیا جائے گا، یہ اصول صرف بعض حدود کے درمیان صحیح ہے اس کا استعمال صرف ان عددوں کی صورت میں ہو سکتا ہے جن میں پانچ سے کم ملحوظ ہندسے نہ ہوں اور اس پر بھی ہم اپنے نتائج کی صحت کا صرف پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک اعتبار کر سکتے ہیں۔

مثلاً ہم کو یہ اصول لوک ۲ اور لوک ۳ کی قیمتوں سے لوک ۵ کی قیمت حاصل کرنے میں نہیں استعمال کرنا چاہیئے کیونکہ اگر ہم ایسا کریں تو چونکہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ۳۷۷۱۲۱۳ اس لئے لوک ۵ کی قیمت اس طرح سے ۳۸۹۰۷۷۵ ہوگی

مگر جدولوں میں لوک ۲۵ کی قیمت ۳۹۷۹۴۰۰ و مندرج سے اس لئے معلوم ہوا کہ اس طرح جو قیمت حاصل ہوگی وہ غلط ہوگی۔

مثلثی نسبتوں کی جدولیں

۱۵۹۔ چمبہر کی جدولوں میں ان سب زاویوں کی مثلثی نسبتیں مندرج ہیں جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں اور ان میں متواتر زاویوں کا فرق اُسے۔

اب چونکہ ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان جو زاوئے واقع ہوں انکی مثلثی نسبتیں ان زاویوں کی نسبتوں میں تحویل ہو سکتی ہیں جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں (دفعہ ۸۱) اس لئے معلوم ہوا کہ جو زاوئے ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں ان کی مثلثی نسبتوں کی جدولوں کو جداگانہ مرتب کرنے کی ضرورت نہیں مثلاً

[جب ۱۱° = جب (۹۰° - ۴۹°۱۳) = جم ۴۹°۱۳ اس لئے جیب مجوزہ معلوم ہو سکتی ہے]

اس قسم کی جدولوں کو لوکار تھی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولوں سے تمیز کرنے کے لئے ان کو طبعی جیوب، جیوب التمام کی جدولیں کہتے ہیں۔

اگر ایک ایسے زاوئے کی جیب مطلوب ہو جس میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو وہ جدولوں سے

حاصل ہو سکتی ہے لیکن اگر زاوے میں ثنائے بھی موجود ہوں تو اس صورت میں ہمیں اصول اجزائے متناسب سے مدد لینی چاہیے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے جب $۱۴۶۹ = ۱۴۸۸۳۶۷۴$

اور جب $۱۵۶۹ = ۱۴۸۸۶۲۱۲$

جب ۱۴۶۹ کی قیمت دریافت کرو

تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

جیب کا فرق آ کے لئے $۲۵۳۸ = ۱۴۸۸۳۶۷۴$

اس لئے جیب کا فرق ۳۲ کے لئے $۲۵۳۸ \times \frac{۳۲}{۱۰۰} =$

$۱۳۵۳۶ =$

∴ جب $۱۴۶۹ = ۱۴۸۸۳۶۷۴$

$۱۳۵۳۶ +$

$۱۴۸۸۵۰۲۸ =$

چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک جواب کی ضرورت ہے اسلئے

ہم ۶ کو ساقط کرتے ہیں اور چونکہ ۷۶ بہ نسبت ۷۰ کے عدد ۸۰ کے زیادہ

قریب ہے اس لئے ہم لکھتے ہیں

جب $۱۴۶۹ = ۱۴۸۸۵۰۲۸$

یا دواشت جب اعشاریہ کے آٹھویں مقام سے کسی ہندسے کو ساقط

کیا جائے تو ساتویں مقام پر جو ہندسہ ہو اس میں ۱ زیادہ کرنا چاہیئے

اگر عدد مسقوط ۵ یا ۵ سے بڑا ہو۔

مثال ۲۔ معلوم ہے جم $۲۷۹۶ = ۵۵۹۰۷۷۲$

اور جم ۶۸ ۶۴ = ۹۵۸۹۸۴۸

۶۴ ۶۴ کی قیمت دریافت کرو

۶۱ میں جم ثابت کر چکے ہیں کہ جب زادہ بڑھتا ہے تو اس کی اتمام گھٹتی ہے۔

۱ لئے جب زادہ بقدر ۶۰ کے بڑھے گا تو جیب اتمام بقدر ۸۱۰۰۰۰ کے گھٹے گی۔

اس لئے جب زادہ بقدر ۶۴ کے بڑھے گا تو جیب اتمام بقدر ۸۲۴۰۰۰ کے گھٹے گی۔

جم ۶۴ ۶۴ = ۹۵۹۰۶۷۲ - ۸۲۴ × ۴۶ = ۸۲۴۰۰۰

۹۵۹۰۶۷۲ - ۶۴۵ = ۸۹۴۵

۹۵۹۰۶۷۲ =

۶۴۵ - ۸۹۴۵ =

۹۵۹۰۰۲۷ =

سرا اس کو یوں لکھتے ہیں

۹۵۸۹۸۴۸ = ۶۸ ۶۴

۹۵۹۰۶۷۲ = ۶۴ ۶۴

۸۲۴ کیلئے = ۸۲۴ - ۸۲۴

۸۲۴ × ۴۶ = ۸۲۴ - ۸۲۴

۶۴۵ - ۸۹۴۵ =

۹۵۹۰۶۷۲ = جواب

۶۴۵ - ۸۹۴۵ =

۹۵۹۰۰۲۷ =

$$\begin{array}{r}
 ۸۲۴ \\
 ۴۶ \\
 \hline
 ۵۷۶۸ \\
 ۳۲۹۶ \\
 \hline
 ۴۰) ۳۸۷۲۸ \\
 ۶۴۵
 \end{array}$$

۱۶۰۔ جب کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو اُس زاویہ کا دریافت کرنا اب آسان ہوگا۔

مثال۔ ایک زاویہ کا ماس تمام ۱۵۴۱۰۹۳۲۵ ہے اُس کو معلوم کرو، دیا ہوا ہے $۱۹^{\circ}۳۵' = ۱۵۴۱۱۴۹۹$

اور $۱۵۴۱۰۶۰۹۸ = ۲۰^{\circ}۳۵'$

فرض کرو کہ زاویہ مطلوبہ $۱۹^{\circ}۳۵' + \text{لا}^{\circ}$ ہے

یعنی $\text{م} (۱۹^{\circ}۳۵' + \text{لا}^{\circ}) = ۱۵۴۱۰۹۳۲۵$

اوپر کی تین مساواتوں سے ظاہر ہے کہ

جب زاویہ بقدر ۱۹° کے بڑھتا ہے تو اُس کا ماس تمام بقدر ۸۷۰۱۰۰۰ کے گھٹتا ہے

جب زاویہ بقدر لا° کے بڑھتا ہے تو اس کا ماس تمام بقدر ۵۴۷۳۰۰۰ کے گھٹتا ہے۔

$$\therefore \text{لا} : ۱۹^{\circ}۳۵' = ۵۴۷۳ : ۸۷۰۱۰ \text{ اسلئے لا} = ۳۷۷۷$$

پس زاویہ مطلوبہ $۱۹^{\circ}۳۵' + ۳۷۷۷$

۱۶۱۔ ایسے سوالات میں مسئلہ اجزائے متناسب استعمال

کرتے وقت طالب علم کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیئے کہ

جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی مثلثی نسبتیں بڑھتی ہیں یا گھٹتی

ہیں، شاید اس بات کے یاد رکھنے سے اُس کو مدد ملے کہ

جب زاویہ راجع اول میں بڑھتا ہے تو اُس کی تین مثلثی

نسبتیں جن کے آخر میں ”تمام“ ہے یعنی جیب تمام،

ماس تمام اور قاطع تمام گھٹتی ہیں۔

لوکار تھی جیب، جیب، التمام وغیرہ کی جدولیں

۱۶۲۔ کئی قسم کے مثلثی حسابات ایسے ہیں (مثلاً مثلثات کامل) جن میں مثلثی نسبتوں کے لوکار تھوں کی ضرورت پڑتی ہے اب اگر ہم سب سے اول جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب دریافت کریں اور پھر اُس جیب کا لوکار تھ دوبارہ جدولوں سے پڑھیں تو اس میں وقت ہوگی، ایسی محنت سے بچنے کے لئے مثلثی نسبتوں کے لوکار تھوں کی جدولیں جدا گانہ مرتب کی گئی ہیں اور بموجب سابق ان جدولوں میں صرف ان زاویوں کی قیمتوں کا مندرج کرنا کافی ہے جو ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں۔ چونکہ زاویہ کی جیب ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے اس لئے جیب کا لوکار تھ منفی ہوگا [صفحہ ۱۴۸]

نیز چونکہ جو زاویہ ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہو اُس کا ماس ایک سے کم ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکار تھ ہمیشہ منفی ہوگا۔ لیکن جو زاویہ ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہو اُس کا ماس ایک سے بڑا ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکار تھ ہمیشہ مثبت ہوگا۔

۱۶۳۔ ہر ایک صورت میں مثلثی جملوں کے لوکار تھوں کے ماقبل مناسب علامت تحریر کرنے کی محنت سے بچنے کے لئے جدولوں میں لوکار تھوں کی اصلی قیمتیں نہیں لکھی جاتیں لیکن ہر ایک لوکار تھ کی اصلی قیمت پر دس کا اضافہ کر دیا

جائے،

مثلاً جب $\frac{1}{4} = ۳۰$

اس لئے لوک جب $۳۰ = \frac{1}{4}$ لوک $\frac{1}{4} = ۲$

$$۲۳۸۵۹۰۶ + ۱۰ = ۲۳۸۵۹۱۶$$

لیکن جدولوں میں جو قیمت مندرج ہوگی وہ

۱۰ + لوک جب ۳۰ یعنی ۲۳۸۵۹۱۶ ہوگی

نیز مس $\frac{3}{4} = ۹۰$

اس لئے لوک مس $۹۰ = \frac{3}{4}$ لوک $\frac{3}{4} = ۳$ (۳۱۳۷۷۷۷۷)

$$۲۳۸۵۹۰۶ + ۱۰ = ۲۳۸۵۹۱۶$$

اس لوکارقم کی قیمت جدولوں میں

۱۰ + ۲۳۸۵۹۰۶ یعنی ۲۳۸۵۹۱۶ مندرج ہوگی۔

ان "جدولی لوکارتموں" کو ہم حرف ل سے تعبیر کریں گے

مثلاً ل جب $۱۵ = ۲۵$ + لوک جب $۱۵ = ۲۵$

اور ل قط $۲۸ = ۲۳$ + لوک قط $۲۸ = ۲۳$

۱۶۴ - اگر کسی زاویہ میں صرف درجوں اور دقیقوں کی

صحیح تعداد شامل ہو تو اس کے کسی جلد کی جدولی لوکارتم بلا واسطہ

جدولوں سے حاصل ہو سکتی ہے، لیکن اگر زاویہ میں ثنائے بھی موجود

ہوں تو اصول اجزائے متناسب کو استعمال کرنا چاہیئے، اس

صورت میں ترکیب عمل دفعہ ۱۵۹ کے بالکل متشابه ہے۔

اب ہم اس کی اور اس کے عکس سوال کی ایک ایک مثال

عمل کریں گے۔

۱۔ معلوم ہے ل قم $۶۱ ۳۲ = ۱۰۵۲۷۱۵۷۳۳$

اور ل قم $۶۲ ۳۲ = ۱۰۵۲۷۱۳۷۴۰$

۶۱ ۳۲ کی قیمت دریافت کرو

۱۰۵۲۷۱۳۷۴۰ کے بڑھتا ہے تو اس کا لوکارتم بقدر ۱۹۹۳... کے گشت

اس لئے جب زاویہ بقدر ۱۰ کے بڑھے گا تو لوکارتم میں متناسب

۱۰۵۲۷۱۳۷۴۰ یعنی ۱۹۹۳... کے ہوگی

ل قم $۶۱ ۳۲ = ۱۰۵۲۷۱۵۷۳۳$

۱۰۵۲۷۱۳۷۴۰

$۱۰۵۲۷۱۳۰۳۹ =$

۲۔ ایک ایسا زاویہ معلوم کرو جس کے ماس کا جدولی لوکارتم

۱۰۵۲۷۱۳۷۴۰ ہو

دیکھ لا زاویہ مطلوب ہے

۱ سے حاصل ہوگا

ل مس لا $۹۵۳۲۱۷۲۵۰ =$ ل مس $۶۸۱۵ = ۹۵۳۲۰۰۶۲$

ل مس $۶۸۱۵ = ۹۵۳۲۱۵۱۳۵$ ل مس $۲۷۱۵ = ۹۵۳۲۱۵۱۳۵$

فرق آگئے = ۲۷۱۷

۲۱۰۵
۶۰

$۲۷۱۷ \overline{) ۱۲۶۳۰۰ (۲۵۵۷}$
 $\underline{۹۸۳۳}$
 ۲۷۹۷۰
 $\underline{۲۲۵۸۵}$
 ۳۳۷۵۰

بق = ۲۱۰۵

بازدادتی = $\frac{۲۱۰۵}{۲۷۱۷} \times ۶۰$

۲۵۵۷ =

$۲۵۵۷ ۲۷۱۵ =$

مثال ۳۔ معلوم ہے ل جب ۹۴ ۶ = ۹۵۳۸۶۴۰۳۰

ل قم ۹۴ ۶ کی قیمت دریافت کرو

لوک جب ۹۴ ۶ = ل جب ۹۴ ۶ = ۱۰۔

$$۹۵۳۸۶۴۰۳۰ + ۱ = ۹۵۳۸۶۴۰۳۱$$

اب لوک قم ۹۴ ۶ = لوک جب ۹۴ ۶

= لوک جب ۹۴ ۶

$$۹۵۳۸۶۴۰۳۱ - ۱ = ۹۵۳۸۶۴۰۳۰$$

$$۹۵۳۸۶۴۰۳۰ = ۹۵۳۸۶۴۰۳۰$$

اس لئے ل قم ۹۴ ۶ = ۹۵۳۸۶۴۰۳۰

اور اس سے زیادہ عام صورت یہ ہے، چونکہ جب طہ × قم طہ = ۱

∴ لوک جب طہ لوک قم طہ = ۰

∴ ل جب طہ + ل قم طہ = ۲۰

اس عمل میں اس قسم کی غلطی سے بچنا چاہیئے، طالب علم بعض اوقات فرض کرتا ہے کہ

چونکہ لوک قم ۹۴ ۶ = ۰ - لوک جب ۹۴ ۶

اس لئے ل قم ۹۴ ۶ = ۰ - ل جب ۹۴ ۶

اور یہ صریحاً غلط ہے

امثلہ نمبری ۲۳

۱۔ معلوم ہے لوک ۳۵۴۰۵ = ۳۵۵۲۴۲۹۰

لوک ۳۵۴۰۶ = ۳۵۵۲۴۲۱۲ اور

۳۵۷۰۵۷۷ اور لوک ۳۵۷۷۰۵۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو

معلوم ہے لوک $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

اور لوک $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

۳۵۷۷۰۵۸۵ اور لوک ۳۵۷۷۰۵۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو

معلوم ہے لوک $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

اور لوک $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

دوں کو دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب ۳۵۷۷۰۵۸۵ اور ۳۵۷۷۰۵۸۵

۳۵۷۷۰۵۸۵ ہوں

معلوم ہے لوک $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

اور لوک $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب ۳۵۷۷۰۵۸۵ اور ۳۵۷۷۰۵۸۵

۳۵۷۷۰۵۸۵ ہوں۔

اس کتاب میں جدول اعداد کا کچھ حصہ جو بطور نمونہ کے دیا گیا ہے
کی مدد سے ذیل کے اعداد کے لوکارتم دریافت کرو۔

۵۲۵۳۸۷۹۷ اور ۵۲۷۷۲۸۷ (۲) ۵۲۷۷۲۸۷ (۳) ۵۲۷۷۲۸۷ (۴) ۵۲۷۷۲۸۷ (۵)

دریافت کرو جن کے لوکارتم مفصلہ ذیل ہوں

۳۵۷۷۰۵۸۵ (۵) ۳۵۷۷۰۵۸۵ (۶) ۳۵۷۷۰۵۸۵ (۷) ۳۵۷۷۰۵۸۵ (۸) ۳۵۷۷۰۵۸۵ (۹)

معلوم ہے جب $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

اور جب $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۳۵۷۷۰۵۸۵$

۳۵۷۷۰۵۸۵ کی قیمت دریافت کرو

لیکنا دیہ کی جیب ۳۵۷۷۰۵۸۵ سے اس کو معلوم کرو۔

- ۸- معلوم ہے حجم $۱۶۳۲ = ۵۵۷۶۸۴$
 اور حجم $۱۷۳۲ = ۵۸۴۵۱۷۲$
 جم ۱۶۳۲ اور جم ۱۷۳۲ کی قیمت دریافت کرو۔
- ۹- نیز ان زاویوں کو دریافت کرو جن کی جیب اتمام
 ۳۲۸۳۵۸۳۲ اور ۲۸۴۵۵۱۷۲ ہوں۔
- ۱۰- معلوم ہے مس $۲۱۷۶ = ۴۵۱۷۷۷۸۳$
 اور مس $۲۲۷۶ = ۴۵۱۲۳۰۰۷۹$
 مس ۲۱۷۶ اور مس ۲۲۷۶ کی قیمتیں دریافت کرو۔
- ۱۱- معلوم ہے قم $۸۱۳ = ۴۵۳۰۱۰۶۱۶$
 اور قم $۹۱۳ = ۴۵۳۹۵۵۸۱۷$
 قم ۸۱۳ اور قم ۹۱۳ کی قیمتیں دریافت کرو۔
- ۱۲- نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا قاطع اتمام ۳۳۹۶۷۸۹ ہو
- ۱۳- معلوم ہے ل جم $۳۲۳۲ = ۹۱۴۷۷۷۲۹$
 اور ل جم $۳۲۳۲ = ۹۱۴۶۸۵۲$
 ل جم ۳۲۳۲ کی قیمت دریافت کرو۔
- ۱۴- نیز زاویہ طہ معلوم کرو جہاں
 ل جم طہ $۳۲۳۲ = ۹۱۴۷۳۲۸$
- ۱۵- معلوم ہے ل مم $۲۷۷۶ = ۹۵۲۵۷۷۷۹$
 اور ل مم $۲۸۷۶ = ۹۵۲۵۳۵۸۹$
 ل مم ۲۷۷۶ کی قیمت دریافت کرو۔
- نیز مساوات ل مم طہ $۸۲ = ۹۵۲۵۳۷۸۲$ کو حل کرو۔

معلوم ہے ل قط ۹۸ = ۶۷ ۱۰۵۰۲۲۹۱۶۸

اور ل قط ۹۸ = ۶۸ ۱۰۵۰۲۲۹۵۹۰

ط ۹۸ = ۶۷ کی قیمت دریافت کرو

نیز وہ زاد یہ معلوم کرو جس کا ل قط سادی ہو ۱۰۵۰۲۲۹۲۸۵ کے
انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں وہ زاد یہ معلوم کرو جس کی
۹۱ ہو معلوم ہے

لوک ۶ = ۷۷۸۱۵۱۳

ل جب ۶۷ = ۵۲ ۹۵۷۷۸۱۱۸۶

ل جب ۶۷ = ۵۳ ۹۵۷۷۸۲۸۷۰

۱۱۔ اس جگہ (صفحہ ۲۴۳) چمبر کے جدولوں سے ہم ایک صفحہ بطور نمونہ
دیتے ہیں، اس میں اُن سب زادیوں کی مثلثی نسبتوں
۷ جدولی لوکارتم مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° نیز ۷۵° اور ۵۸°
درمیان واقع ہیں۔

پہلے خانے میں اُن سب زادیوں کی جدولی جیب مندرج
۷ جو ۳۲° اور ۳۳° کے درمیان بقدر ایک منٹ یا دقیقہ کے
ہتے ہیں۔

دوسرے خانے میں نقطہ فرق کے نیچے عدد ۲۰۲۱ لکھا
اچھے، اس کا یہ مطلب ہے کہ ل جب ۳۲° اور ل جب ۳۲° ۱
کے درمیان فرق ۲۰۲۱... ہے، اسکی تصدیق ۹۵۷۷۲۲۰۹۷
۹۵۷۷۲۲۱۱۸ سے تفریق کرنے سے ہو سکتی ہے، نیز یاد رہے
عدد ۲۰۲۱ کو اعداد ۹۵۷۷۲۲۰۹۷ اور ۹۵۷۷۲۲۱۱۸ کے

محاذی وسط میں کر کے لکھا گیا ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ ان دو عددوں کے حاصل تفریق کو تعبیر کرتا ہے۔

دوسرا خانہ جس کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے بائیں طرف اُس خانہ کے بھی متعلق ہے جس کے بائیں پر قاطع النہام لکھا ہوا ہے اسی طرح سے پانچواں خانہ جس میں متصل جدولی لوکار توں کے فرق مندرج ہیں دائیں اور بائیں طرف دونوں خانوں کے متعلق ہے۔

۱۶۶۔ جن خانوں کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے ان کے استعمال کرنے میں ایک بات یاد رکھنی چاہیے۔ اوپر اس کا ذکر ہو چکا ہے کہ دوسرے خانے میں سب سے اوپر جو عدد ۲۰۲۱ لکھا ہوا ہے درحقیقت اس کا مطلب ۲۰۲۱۰۰۰ ہے، لیکن آٹھویں خانہ کے سر پر جو عدد ۷۹۰ ہے اس کا مطلب ۷۹۰۰۰۰ ہے، نہیں ہے بلکہ ۷۹۰۰۰۰۰ ہے، قاعدہ یہ ہے کہ فرق میں جو ہندسہ دائیں طرف اکائی کے مقام پر ہو اُس کو ہمیشہ اعشاریہ کے ساتویں مقام پر رکھ کر بائیں طرف صغروں کی ضروری تعداد کا اضافہ کرنا چاہئے مثلاً

فرق = ۹ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۹۰۰۰۰۰۰ ہے

فرق = ۷۴ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۷۴۰۰۰۰۰ ہے

فرق = ۷۳۵ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۷۳۵۰۰۰۰ ہے

فرق = ۲۰۲۱ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۲۰۲۱۰۰۰۰ ہے

فرق = ۱۲۳۴۸ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۱۲۳۴۸۰۰۰ ہے

جیب

جیب	زق	قاطع	ماس	زق	ماس	قاطع	زق	جیب
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱۸۱	۱۸۱	۱۸۱	۱۸۱	۱۸۱	۱۸۱	۱۸۱	۱۸۱
۲	۳۶۲	۳۶۲	۳۶۲	۳۶۲	۳۶۲	۳۶۲	۳۶۲	۳۶۲
۳	۵۴۳	۵۴۳	۵۴۳	۵۴۳	۵۴۳	۵۴۳	۵۴۳	۵۴۳
۴	۷۲۴	۷۲۴	۷۲۴	۷۲۴	۷۲۴	۷۲۴	۷۲۴	۷۲۴
۵	۹۰۵	۹۰۵	۹۰۵	۹۰۵	۹۰۵	۹۰۵	۹۰۵	۹۰۵
۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶	۱۰۸۶
۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷	۱۲۶۷
۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸	۱۴۴۸
۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹	۱۶۲۹
۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰	۱۸۱۰

۱۰۰

۱۰۰

۱۰۰

[illegible]

[illegible]

جیب	زنی	قاطع	مکس	زنی	مکس	قاطع	زنی	جیب
۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱
۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۲
۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۳
۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۴
۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۵
۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۶
۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۷
۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۸
۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۹
۱۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰
۱۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۱
۱۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۲
۱۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۳
۱۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۴
۱۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۵
۱۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۶
۱۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۷
۱۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۸
۱۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۹
۲۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۲۰

مکس

جیب	رق	قاطع	عامس	رق	عامس	قاطع	رق	جیب
۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱
۲	۹۹	۹۹	۹۹	۹۹	۹۹	۹۹	۹۹	۲
۳	۹۸	۹۸	۹۸	۹۸	۹۸	۹۸	۹۸	۳
۴	۹۷	۹۷	۹۷	۹۷	۹۷	۹۷	۹۷	۴
۵	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۵
۶	۹۵	۹۵	۹۵	۹۵	۹۵	۹۵	۹۵	۶
۷	۹۴	۹۴	۹۴	۹۴	۹۴	۹۴	۹۴	۷
۸	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۸
۹	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹
۱۰	۹۱	۹۱	۹۱	۹۱	۹۱	۹۱	۹۱	۱۰
۱۱	۹۰	۹۰	۹۰	۹۰	۹۰	۹۰	۹۰	۱۱
۱۲	۸۹	۸۹	۸۹	۸۹	۸۹	۸۹	۸۹	۱۲
۱۳	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۱۳
۱۴	۸۷	۸۷	۸۷	۸۷	۸۷	۸۷	۸۷	۱۴
۱۵	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۱۵
۱۶	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۱۶
۱۷	۸۴	۸۴	۸۴	۸۴	۸۴	۸۴	۸۴	۱۷
۱۸	۸۳	۸۳	۸۳	۸۳	۸۳	۸۳	۸۳	۱۸
۱۹	۸۲	۸۲	۸۲	۸۲	۸۲	۸۲	۸۲	۱۹
۲۰	۸۱	۸۱	۸۱	۸۱	۸۱	۸۱	۸۱	۲۰
۲۱	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۲۱
۲۲	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۲۲
۲۳	۷۸	۷۸	۷۸	۷۸	۷۸	۷۸	۷۸	۲۳
۲۴	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۲۴
۲۵	۷۶	۷۶	۷۶	۷۶	۷۶	۷۶	۷۶	۲۵
۲۶	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۲۶
۲۷	۷۴	۷۴	۷۴	۷۴	۷۴	۷۴	۷۴	۲۷
۲۸	۷۳	۷۳	۷۳	۷۳	۷۳	۷۳	۷۳	۲۸
۲۹	۷۲	۷۲	۷۲	۷۲	۷۲	۷۲	۷۲	۲۹
۳۰	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۳۰
۳۱	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۳۱
۳۲	۶۹	۶۹	۶۹	۶۹	۶۹	۶۹	۶۹	۳۲
۳۳	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۳۳
۳۴	۶۷	۶۷	۶۷	۶۷	۶۷	۶۷	۶۷	۳۴
۳۵	۶۶	۶۶	۶۶	۶۶	۶۶	۶۶	۶۶	۳۵
۳۶	۶۵	۶۵	۶۵	۶۵	۶۵	۶۵	۶۵	۳۶
۳۷	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۳۷
۳۸	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۳۸
۳۹	۶۲	۶۲	۶۲	۶۲	۶۲	۶۲	۶۲	۳۹
۴۰	۶۱	۶۱	۶۱	۶۱	۶۱	۶۱	۶۱	۴۰
۴۱	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۴۱
۴۲	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۴۲
۴۳	۵۸	۵۸	۵۸	۵۸	۵۸	۵۸	۵۸	۴۳
۴۴	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۴۴
۴۵	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۴۵
۴۶	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۴۶
۴۷	۵۴	۵۴	۵۴	۵۴	۵۴	۵۴	۵۴	۴۷
۴۸	۵۳	۵۳	۵۳	۵۳	۵۳	۵۳	۵۳	۴۸
۴۹	۵۲	۵۲	۵۲	۵۲	۵۲	۵۲	۵۲	۴۹
۵۰	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۰

در کتاب

جیب	نق	مس	نق	مس	نق	جیب
۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۲۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۳۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۲	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۶	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۴۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰

جیب

۱۶۷۔ جدول صفحہ ۲۳۸۲ سے ۵۷ اور ۵۸ کے درمیان جو زاوے واقع ہوں ان کی نسبتوں کے جدولی لوکارتم بھی معلوم ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ل مس ۵۷ ۲۰ مطلوب ہے، اگر ہم صفحہ مذکورہ کی سب سے نیچے کی سطر سے شروع ہو کر اس خانے میں اوپر دیکھتے جائیں جس کے بائیں پر ماس لکھا ہوا ہے تو ہمیں ایک عدد ۲۸۶۰۳۰۱۹۳۰ ملے گا جس کے بائیں طرف افقی سطر کے آخر میں عدد ۲۰ لکھا ہوا ہے، یہ جدول مس ۵۷ ۲۰ کی قیمت ہے۔

امثلہ نمبری ۲۵

۱۔ معلوم ہے جم طہ = ۵۹۷۲۵۳۸۲

جم ۱۳ ۲۷ = ۵۹۷۲۵۷۳۳

فرق آ کے لئے = ۶۷۷

زاویہ طہ کی قیمت دریافت کرو

۲۔ ایک زاوے کی جیب $\frac{۳}{۸}$ ہے اس کو معلوم کرو

معلوم ہے جب ۲۲ آ = ۳۷۷۸۷۶۳

نیز آ کے لئے فرق = ۲۶۹۶

۳۔ معلوم ہے قوس ۶۵ ۲۳ = ۱۵۰۹۹۸۲۲۳

فرق آ کے لئے = ۱۳۶۳

قوس ۶۵ ۲۳ کے قیمت دریافت کرو نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا

قاطع التمام ۹۹۷۹۳۸ - ۵۱۵

۴ - ل مس ۲۲ ۳۷ = ۹۵۹۱۹۷۰۵

فرق ا کے لئے = ۳۵۵۷

ل مس ۲۲ ۳۷ کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو

جس کا ل مس = ۹۵۹۱۹۵۲۸۳

۵ - وہ زاویہ معلوم کرو جس کی ل جم برابر ۹۵۹۹۳ کے ہو -

معلوم ہے ل جم ۱۰ ۱۵ = ۹۵۹۹۳۰۱۳۱

اور فرق ا کے لئے = ۲۲۹

۶ - وہ زاویہ دریافت کرو جس کا ل قط برابر ۱۰۵۱۵ کے ہو معلوم ہے

ل قط ۲۲ ۵۵ = ۱۰۵۱۳۹۸۸۴۳ اور

ا کے لئے فرق = ۱۲۶۰

۷ - جدول مندرجہ ذیل سے جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو -

(۱) ل جب ۲۲ ۱۸ ۲۳ ل جم ۳۲ ۱۴ ۲۹

(۳) ل مم ۲۲ ۲۹ ۲۳ ل قط ۳۲ ۵۲ ۲۷

(۵) ل مس ۲۵ ۲۸ ۲۷ ل قم ۳۸ ۲۸ ۲۱

(۷) ل جم ۲۹ ۵۸ ۲۹

۸ - اسی جدول کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو -

(۱) ل مس طہ = ۱۰۵۱۹۵۹۲۶۱

(۲) ل قم طہ = ۱۰۵۰۷۳۸۱۲۵

(۳) ل جم طہ = ۹۵۹۲۵۹۲۸۳

(۴) ل جب طہ = ۹۵۹۲۳۱۳۵۲

۹۔ جدولوں سے ل مس ۹۶ ۶ ۲۳ کی قیمت دریافت کرو اور

ماس کے جذر کی قیمت کا حساب لگاؤ

۱۰۔ مقادیر ذیل کو لوکار تھی حسابات کے قابل بناؤ یعنی اُن کو

حاصل ضرب کی صورت میں بیان کرو

$$(۱) \quad ۱ + \text{مس لا} \times \text{مس م} \quad (۲) \quad ۱ - \text{مس لا} \times \text{مس م}$$

$$(۳) \quad \text{حم لا} + \text{مس م} \quad (۴) \quad \text{حم لا} - \text{مس م}$$

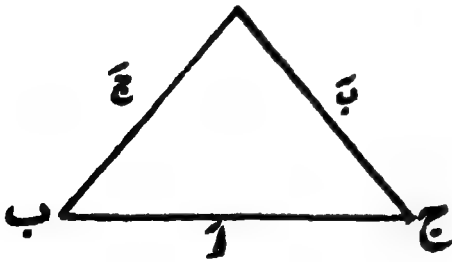
$$(۵) \quad \frac{۱ - \text{حم م لا}}{۱ + \text{حم م لا}} \quad (۶) \quad \frac{\text{مس لا} + \text{مس م}}{\text{حم لا} + \text{حم م}}$$



باب دوازدہم

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی مشلتی نسبتوں کے تعلقات

۱۶۸۔ مثلث کے زاویوں کو ہم آئندہ حروف 'ا' 'ب' 'ج' سے اور ان کے مقابل کے اضلاع کو بالترتیب حروف 'ا' 'ب' 'ج' سے تعبیر کریں گے، یاد رہے کہ 'ا' 'ب' 'ج' اعداد ہیں کیونکہ وہ مثلث کے اضلاع کے طولوں کو کسی ایک پیمانہ واحد کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔



ب ج = ا

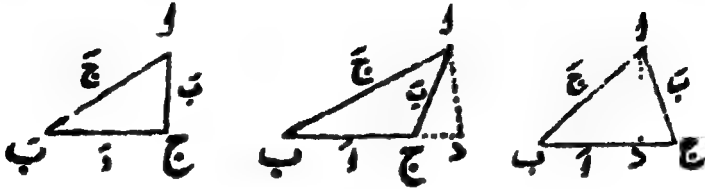
ج ا = ب

ا ب = ج

۱۶۹۔ مسئلہ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ج ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ا}}$$

یعنی مثلث کے زاویوں کی جیبوں کے مقابل کے اضلاع کے متناسب ہوتی ہیں



زاویہ ا سے عمود ا د مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج محدودہ پر نکالو جو اس کو نقطہ د پر ملے۔

مثلث ا ب د میں

$$\frac{ا د}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج} \text{ یعنی } ا د = ج ج \text{ جب ب ج}$$

مثلث ا ج د میں

$$\frac{ا د}{ج ج} = \frac{ب ج}{ب ج} \text{ یعنی } ا د = ب ج \text{ جب ج ج}$$

[اگر زاویہ ج منفرج ہو جیسا کہ دوسری شکل میں تو $\frac{ا د}{ج ج} = \frac{ب ج}{ج ج}$ جب ا ج د

$$= \frac{ب ج}{ج ج} \text{ (۱۸۰-ج) = جب ج (دفعہ ۷۱) یعنی } ا د = ب ج \text{ جب ج ج}$$

ا د کی یہ دونوں قیمتیں برابر رکھنے سے

$$ج ج ب ج = ب ج ج ج$$

$$\text{یعنی } \frac{ب ج ج ج}{ج ج} = \frac{ج ج ج ج}{ج ج}$$

اسی طرح زاویہ ب سے ج ا پر عمود نکالنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جیب } \angle}{1} = \frac{\text{جیب } \angle}{\text{جیب } \angle}$$

اگر زاویہ ج قائم ہو جیسا کہ تیسری شکل میں تو جیب ج = ۱

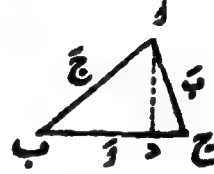
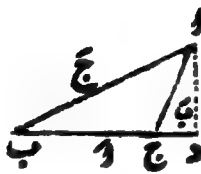
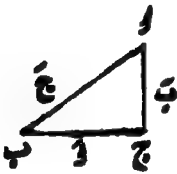
$$\text{جیب } \angle = \frac{1}{\text{جیب } \angle} \text{ اور جیب } \angle = \frac{1}{\text{جیب } \angle}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{جیب } \angle}{1} = \frac{\text{جیب } \angle}{\text{جیب } \angle} = \frac{1}{\text{جیب } \angle} = \frac{\text{جیب } \angle}{\text{جیب } \angle}$$

پس ہر ایک صورت میں

$$\frac{\text{جیب } \angle}{1} = \frac{\text{جیب } \angle}{\text{جیب } \angle} = \frac{\text{جیب } \angle}{\text{جیب } \angle}$$

۱۷۰۔ کسی مثلث میں کسی زاویہ کی جیب تمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں اگر زاویہ ا سے عمود ا د مقابل کے
منع ب ج یا ب ج عمودہ پر نکالا جائے تو وہ اس کو نقطہ د پر ملتا ہے
صورت اول۔ فرض کرو کہ زاویہ ج حادہ ہے دیکھو شکل اول
بوجہ اقلیدس م ۲ ش ۱۳

$$\text{ا ب}^2 = \text{ب ج}^2 + \text{ج ا}^2 - ۲ \text{ ب ج} \times \text{ج د} \dots\dots\dots (۱)$$

لیکن $\frac{ج د}{ج ا} = جم ج یعنی ج د = ب جم ج$ اس لئے
(۱) سے حاصل ہوگا

$$ج^۲ = ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب \times جم ج$$

$$یعنی ۲ ا ب جم ج = ا^۲ + ب^۲ - ج^۲$$

$$یعنی جم ج = \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{۲ ا ب}$$

صورت دوم - فرض کرو کہ زاویہ ج منفی ہے جیسا کہ
دوسری شکل میں

تب بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۲

$$ا ب^۲ = ب ج^۲ + ج ا^۲ + ۲ ا ب ج \times ج د \dots (۲)$$

لیکن $\frac{ج د}{ج ا} = جم ج = جم (ج - ا ب) = - جم ج$
(صفحہ ۷۸)

پس ج د = - ب جم ج
اس لئے (۲) سے حاصل ہوگا

$$ج^۲ = ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب (جم ج)$$

$$= ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب جم ج$$

پس یوانی صورت اول

$$جم ج = \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{۲ ا ب}$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ب^2 + ج^2 - ۲ج^2}{۲بج} = ۱$$

$$\frac{ج^2 + ۲ج^2 - ۲ب^2}{۲ج^2} = ۱$$

اگر مثلث کا ایک زاویہ (مثلاً ج) قائمہ ہو تو اوپر کے مناسبت سے حاصل ہوگا $ج^2 = ۲ج^2 + ۲ب^2 - ۲ج^2$ یعنی $ج = ۰$ اور یہ درست ہے کیونکہ زاویہ ج قائمہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ج کی ہر ایک قیمت کے لئے مناسبت درست ہے

مثال - اگر $ا = ۱۵$ ، $ب = ۳۶$ ، $ج = ۳۹$

$$\frac{۱۵^2 - ۳۹^2 + ۳۶^2}{۳۹ \times ۳۶ \times ۲} = ۱$$

$$\frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۲۸۸}{۱۳ \times ۲۳} = \frac{(۱۵ - ۱۳ + ۱۲)^2}{۱۳ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۲} =$$

۱۷۱ - مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو

کسی مثلث میں بموجب دفعہ ۱۷۰

$$\frac{ب^2 + ج^2 - ۲ج^2}{۲بج} = ۱$$

لیکن بموجب دفعہ ۱۱۵

$$ج = ۱ - ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{ب^2 + ج^2 - ۲ج^2}{۲بج} = ۱ - ۱ = ۰ \text{ جب } \frac{۱}{۲} = ۱ - ۱ = ۰$$

$$\frac{۲ \text{ ب ج} - ۲ \text{ ب} - ۲ \text{ ج} + ۲ \text{ و}}{۲ \text{ ب ج}} =$$

$$\frac{۲ \text{ و} - (۲ \text{ ب} + ۲ \text{ ج} - ۲ \text{ ب ج}) - ۲ \text{ و} - (۲ \text{ ب} - ۲ \text{ ج})}{۲ \text{ ب ج}} =$$

$$\frac{[۲ \text{ و} + (۲ \text{ ب} - ۲ \text{ ج})][۲ \text{ و} - (۲ \text{ ب} - ۲ \text{ ج})]}{۲ \text{ ب ج}} =$$

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{(۲ \text{ و} + ۲ \text{ ب} - ۲ \text{ ج})(۲ \text{ و} - ۲ \text{ ب} + ۲ \text{ ج})}{۲ \text{ ب ج}} =$$

فرض کرو کہ $۲ = \text{و} + \text{ب} + \text{ج}$ یعنی ن مثلث کے نصف مجموعہ
اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔

تب $\text{و} + \text{ب} - \text{ج} = \text{و} + \text{ب} + \text{ج} - ۲ \text{ ج} = ۲ - ۲ \text{ ج} = ۲(۱ - \text{ج})$
اور $\text{و} - \text{ب} + \text{ج} = \text{و} + \text{ب} + \text{ج} - ۲ \text{ ب} = ۲ - ۲ \text{ ب} = ۲(۱ - \text{ب})$
رابط (۱) سے حاصل ہوگا

$$۲ \text{ جب } ۲ = \frac{۲(۱ - \text{ج}) \times ۲(۱ - \text{ب})}{۲ \text{ ب ج}} = \frac{۲(۱ - \text{ب})(۱ - \text{ج})}{\text{ب ج}}$$

$$\therefore \text{جب } ۲ = \frac{۱}{۲} \sqrt{\frac{(۱ - \text{ب})(۱ - \text{ج})}{\text{ب ج}}} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{اسی طرح سے جب } ۲ = \frac{۱}{۲} \sqrt{\frac{(۱ - \text{و})(۱ - \text{ج})}{۲ \text{ و ج}}}$$

$$\text{اور جب } ۲ = \frac{۱}{۲} \sqrt{\frac{(۱ - \text{و})(۱ - \text{ب})}{۲ \text{ و ب}}}$$

۱۷۲۔ شلت کے نصف زاویوں کی جیوب تمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو
 بموجب دفعہ ۱۱۵
 حجم ۱ = ۲ حجم ۲ = ۱ - ۱

$$\text{اس لئے } ۲ \text{ حجم } ۲ = ۱ + ۱ = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

$$۲ \text{ ب ج} + ۲ \text{ ب ج} + ۲ \text{ ج ج} - ۱ = \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

$$= \frac{[۲ \text{ ب ج} + (۲ \text{ ج ج} - ۱)] [۲ \text{ ج ج} - ۱]}{۲ \text{ ب ج} \times (۲ \text{ ج ج} - ۱)} = \frac{۳}{۸}$$

اب ۲ ب ج - ۱ = ۲ ب ج + ۲ ج ج - ۱ = ۲ ب ج - ۱ = ۲ (ن - ۱) = ۲ (۱ - ن)
 پس (۱) سے حاصل ہوگا

$$۲ \text{ حجم } ۲ = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$۲ \text{ حجم } ۲ = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

اسی طرح سے حجم ۲ = ۲ (ن - ۱) = ۲ (۱ - ن) = ۲ (ن - ۱) = ۲ (۱ - ن)

۱۷۳۔ نصف زاویوں کے مساوات کو اضلاع کی رقوم

میں دریافت کرو

$$\text{چونکہ مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{جب } \frac{1}{2}}{\text{جہم } \frac{1}{2}}$$

اس لئے بموجب (۲) دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{ن (ن-ب) (ن-ج)}}{\text{ب ج}} + \frac{\text{ن (ن-ب) (ن-ج)}}{\text{ب ج}}$$

$$\frac{\text{ن (ن-ب) (ن-ج)}}{\text{ن (ن-ب)}} =$$

اسی طرح سے

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{ن (ن-ب) (ن-ج)}}{\text{ن (ن-ب)}} \text{ اور مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{ن (ن-ب) (ن-ج)}}{\text{ن (ن-ج)}}$$

چونکہ ہر ایک مثلث میں زاویہ \angle ہمیشہ \angle ۱۸۰° سے \angle ۹۰°

اس لئے \angle کی جیب، جیب التمام اور ماس ہمیشہ مثبت ہونگے (دفعہ ۵۸)

اس لئے معلوم ہوا کہ اس دفعہ میں اور گزشتہ دو دفعات میں

علامات جذر کے ماقبل ہمیشہ مثبت علامت لینی چاہیے۔

مثال - اگر $13 = \text{ب}$ ، $13 = \text{ج}$ اور $15 = \text{ن}$

$$\text{تو } \text{ن} = \frac{15 + 13 + 13}{2} = 21 \text{، } \text{ن} - \text{ب} = 8 \text{، } \text{ن} - \text{ج} = 8$$

اور $\text{ن} - \text{ج} = 8$

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{4 \times 4}}{15 \times 13} \sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{جب } \frac{2}{45} = \frac{2}{45} = \frac{\sqrt{8 \times 4}}{13 \times 15} \sqrt{1} = \frac{2}{5}$$

$$\text{جم } \frac{3}{13} = \frac{3}{13} = \frac{\sqrt{4 \times 21}}{13 \times 13} \sqrt{1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{مس } \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{8 \times 4}}{4 \times 21} \sqrt{1} = \frac{2}{5}$$

۱۷۵- مثلث کے کسی زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

بموجب دفعہ ۱۱۵

جب ۱ = ۲ جب $\frac{1}{2}$ جم $\frac{1}{2}$
لیکن دفعات گزشتہ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ب \cdot ج} \sqrt{1} \text{ اور جم } \frac{1}{2} = \frac{ن(ن-ا)}{ب \cdot ج} \sqrt{1}$$

$$\text{اس لئے جب } ۱ = ۲ \sqrt{\frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ب \cdot ج}} \sqrt{\frac{ن(ن-ا)}{ب \cdot ج}}$$

$$\therefore \text{جب } ۱ = \frac{۲}{ب \cdot ج} \sqrt{ن(ن-ا)(ن-ب)(ن-ج)}$$

امثلہ نمبری ۲۶

کسی مثلث میں

۱- معلوم ہے ۱ = ۲، ۲ = ۵، اور ۳ = ۶

مس $\frac{1}{4}$ ' مس $\frac{1}{4}$ اور مس ج معلوم کرو

۲- معلوم ہے $\angle = 125^\circ$ ، $\angle B = 123^\circ$ اور $\angle C = 92^\circ$

مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب اور زاویوں کی جیوب دریافت کرو

۳- معلوم ہے $\angle = 18^\circ$ ، $\angle B = 22^\circ$ اور $\angle C = 30^\circ$

جب \angle ، جب $\angle B$ ، جب $\angle C$ دریافت کرو

ہر صورت میں ترسیبی عمل سے تصدیق کرو

۴- معلوم ہے $\angle = 35^\circ$ ، $\angle B = 83^\circ$ اور $\angle C = 91^\circ$

مس \angle ، مس $\angle B$ ، مس $\angle C$ دریافت کرو

۵- معلوم ہے $\angle = 13^\circ$ ، $\angle B = 13^\circ$ اور $\angle C = 15^\circ$

زاویوں کی جیوب دریافت کرو۔ نیز عمل ترسیبی سے اپنے نتائج کی تصدیق کرو

۶- معلوم ہے $\angle = 28^\circ$ ، $\angle B = 114^\circ$ ، $\angle C = 86^\circ$

مس $\frac{1}{4}$ اور مس \angle کی قیمتیں دریافت کرو،

۷- معلوم ہے $\angle = 37^\circ$ ، $\angle B = 72^\circ$ اور $\angle C = \frac{72 + 92}{2}$

مثلث کے زاوے دریافت کرو،

۱۷۶- ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$\angle = \angle B + \angle C$ جب

دیکھو شکل دفعہ ۱۷۰

صورت اول میں

$\frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ ، $\angle B = \angle C$ جب

$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ج}} \\
 \therefore \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} &= \frac{\text{جب ب} - \text{جب ج}}{\text{جب ب} + \text{جب ج}} = \frac{\text{جم } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2} \text{ جب } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}}{\text{جم } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2} \text{ جب } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}} \\
 &= \frac{\text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}}{\text{مس } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2}} = \frac{\text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}}{\text{مس } \left(\frac{1}{2} - \frac{90}{2} \right)} \\
 &= \frac{\text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}}{\frac{1}{2}} = \text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{1} \quad (\text{دفعہ ۷۵})
 \end{aligned}$$

$$\text{اس لئے } \text{مس } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\frac{\text{ب} + \text{ج}}{2}} \text{ مم } \frac{1}{2}$$

۱۷۸- دفعہ ۱۷۰ کے ضابطوں سے مضابطہ دفعہ ۱۷۶ حاصل ہو سکتے ہیں اور برعکس اس کے۔

$$\begin{aligned}
 & \text{دفعہ ۱۷۰ کے پہلے اور تیسرے ضابطے سے حاصل ہوگا} \\
 & \text{ب جم ج} + \text{ج جم ب} = \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2} = \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2} + \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2} = \frac{\text{ب} + \text{ج} + \text{ب} - \text{ج}}{2} = \frac{2\text{ب}}{2} = \text{ب}
 \end{aligned}$$

$$\text{اس لئے } \text{ب} = \text{ب جم ج} + \text{ج جم ب}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۷۶ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں نیز دفعہ ۱۷۶ کے تین ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب} = \text{ب جم ج} + \text{ج جم ب}$$

$$\text{ب} = \text{ج} + \text{و} + \text{و} + \text{ج}$$

$$\text{اور ج} = \text{و} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج}$$

ان تینوں کو بالترتیب 'و'، 'ب'، 'ج' سے ضرب دینے اور جمع کرنے

$$\text{و} + \text{ب} - \text{ج} = \text{و} + (\text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ب})$$

$$+ \text{ب} + (\text{ج} + \text{ج} + \text{و} + \text{ج} + \text{ج}) - \text{ج} = (\text{و} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} + \text{و}) = ۱۲$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{\text{و} + \text{ب} - \text{ج}}{۲}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۶۸ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۷۹۔ طالب علم کو اکثر ایسی معادلات متبادل حل کرنی پڑیں

جن میں مثلث کے اضلاع اور زاویے دونوں شامل ہوں، ایسی

میں بہتر ہوگا کہ وہ ضلعوں کو زاویوں کی رقوم میں یا زاویوں کی ض

کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کر لے

$$\text{مثال ۱۔ ثابت کرو کہ } \text{و} + \text{ج} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = (\text{ب} + \text{ج}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

یہ جب دفعہ ۱۶۹

$$\frac{\text{و} + \text{ج}}{۲} = \frac{\text{ج} + \text{ب} + \text{ج}}{\text{جب}} = \frac{۲ \text{ جب } \frac{\text{و} + \text{ج}}{۲} + \text{ج}}{\text{جب}}$$

$$\frac{۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ج}}{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{\text{ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ج}}{\text{جب}} = \frac{\text{ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ج}}{\text{جب}}$$

$$\therefore (\text{و} + \text{ج}) \text{ جب } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ج}$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(بّا - جّا) مم ا + (جّا - وّا) مم ب + (وّا - بّا) مم ج =$$

بوجب دفعہ ۱۶۹

$$\frac{جبا}{و} = \frac{جباب}{ب} = \frac{ججج}{ج} = ک (فرض کرد)$$

پس جملہ معلوم

$$= (بّا - جّا) \frac{جبا}{و} + (جّا - وّا) \frac{جباب}{ب} + (وّا - بّا) \frac{ججج}{ج}$$

$$= \frac{۱}{ک} [(بّا - جّا) \frac{جبا}{و} + (جّا - وّا) \frac{جباب}{ب} + (وّا - بّا) \frac{ججج}{ج}]$$

$$= \frac{[وّا - بّا + جّا] (وّا - بّا)}{و ب ج}$$

$$= \frac{۱}{و ب ج ک} [بّا - جّا - وّا (بّا - جّا) + جّا - وّا]$$

$$= [بّا (جّا - وّا) + وّا - بّا - جّا (وّا - بّا)]$$

مثال ۳ - ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(وّا + بّا + جّا) \left(\frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{و} \right) = \frac{۱}{ک} مم ج$$

دائیں طرف کا رکن

$$= ۲ن \left[\frac{(ن - جّا)(ن - وّا)}{ن(ن - بّا)} + \frac{(ن - بّا)(ن - جّا)}{ن(ن - وّا)} \right]$$

$$= ۲ن \left[\frac{ن - وّا}{ن - بّا} + \frac{ن - بّا}{ن - وّا} \right] \frac{ن - جّا}{ن}$$

$$r^2 = \frac{n(n-j)}{\left[\frac{n-b+n-1}{(n-b)(n-1)} \right]}$$

$$r^2 = \frac{n(n-j) \times j}{(n-b)(n-1)} \quad \text{چونکہ } n = 1 + b + j$$

$$r^2 = \frac{j}{n}$$

یہ مثالہ اضلاع کو زاویوں کی رقوم میں بیان کرنے سے بھی ثابت ہو سکتی ہے
دفعہ ۱۶۹ کی مد سے

$$\frac{1 + b + j}{j} = \frac{jb + b + 1}{jb}$$

$$= \frac{jb + \frac{1}{2}jb + \frac{1}{2}jb}{jb} \quad \text{دفعہ ۱۳۳}$$

$$= \frac{jb + \frac{1}{2}jb + \frac{1}{2}jb}{jb}$$

$$= \frac{jb + \frac{1}{2}jb + \frac{1}{2}jb}{jb} \quad \text{نیز}$$

$$= \frac{jb + \frac{1}{2}jb + \frac{1}{2}jb}{jb} \quad \text{دفعہ ۷۵}$$

اس لئے

$$\frac{۲م ج}{مس \frac{۱}{۲} + مس \frac{۱}{۲}} = \frac{و + ب + ج}{ج}$$

یعنی (و + ب + ج) (مس $\frac{۱}{۲}$ + مس $\frac{۱}{۲}$) = ۲ ج م ج

مثال ۴۔ اگر کسی مشتق کے اصطلاح سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کر دو کہ نفع زاویوں کے ماس التمام بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

معلوم ہے و + ج = ۲ ب (۱)
اور ثابت کرنا مطلوب ہے

$$م م \frac{۱}{۲} + م م \frac{ج}{۲} = ۲ م م \frac{۱}{۲} \dots\dots\dots (۲)$$

رابطہ (۲) درست ہوگا اگر

$$\sqrt{\frac{ن(ن-ج)}{(ن-ب)(ن-و)}} + \sqrt{\frac{ن(ن-و)}{(ن-ب)(ن-ج)}} =$$

$$۲ = \sqrt{\frac{ن(ن-ب)}{(ن-ج)(ن-و)}}$$

یا طرین کو $\sqrt{\frac{ن(ن-ب)(ن-و)}{ن}}$ میں ضرب دینے سے رابطہ (۲) درست ہوگا اگر

$$۲(ن-ب) = (ن-ج) + (ن-و)$$

یعنی اگر $۲ن - (ج + و) = ۲ن - ۲ب$

یعنی اگر $و + ج = ۲ب$ جو رابطہ (۱) ہے

پس معلوم ہوا کہ اگر ربط (۱) صحیح ہو تو ربط (۲) بھی صحیح ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷

ثابت کرو کہ کسی شلٹ ا ب ج میں

$$۱- \text{ج ب} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = \frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲} \text{جم}$$

$$۲- \text{ب} \text{ا ج} = \text{ج} + \text{ج ب} = \text{ب} = ۲ \text{ب} - \text{ج} \text{ج ب} \text{ا}$$

$$۳- \text{ا} = (\text{ب} \text{جم ج} - \text{ج} \text{جم ب}) = \text{ب} - \text{ج} \text{ا}$$

$$۴- (\text{ب} + \text{ج}) \text{جم ا} + (\text{ا} + \text{ج}) \text{جم ب} + (\text{ا} + \text{ب}) \text{جم ج} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$$

$$۵- \text{ا} = (\text{جم ب} + \text{جم ج}) = ۲(\text{ب} + \text{ج}) \text{ج ب} \text{ا}$$

$$۶- \text{ا} = (\text{جم ج} - \text{جم ب}) = ۲(\text{ب} - \text{ج}) \text{جم ا}$$

$$۷- \frac{\text{ج ب} (\text{ب} - \text{ج})}{\text{ج ب} (\text{ب} + \text{ج})} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ا}}$$

$$۸- \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ب} - \text{ج}} = \text{مس} \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲} \text{م} - \text{ا} - \text{ب}$$

$$۹- \text{ا ج ب} = (\text{ب} + \frac{\text{ا}}{۲}) = (\text{ب} + \text{ج}) \text{ج ب} \text{ا}$$

$$۱۰- \frac{\text{ا ج ب} (\text{ب} - \text{ج})}{\text{ج ب} + \text{ج ج}} + \frac{\text{ب} \text{ا ج} (\text{ج} - \text{ا})}{\text{ج ب ج} + \text{ج ب} \text{ا}} + \frac{\text{ج} \text{ج ب} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{ج ب} + \text{ا ج ب}} =$$

$$۱۱- (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) (\text{م} \frac{\text{ا}}{۲} + \text{م} \frac{\text{ج}}{۲}) = ۲ \text{ا م} \text{ا}$$

$$۱۲- \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۲(\text{ب} \text{ج} \text{جم ا} + \text{ا ج} \text{جم ب} + \text{ا ب} \text{جم ج})$$

$$(ا-ب+ج) مس ب = (ا+ب-ج) مس ج$$

$$ج = (ا-ب) جم ج + (ا+ب) جب ج$$

$$ا جب (ب-ج) + ب جب (ج-ا) + ج جب (ا-ب) =$$

$$\frac{ا جب (ب-ج)}{ب-ج} = \frac{ب جب (ج-ا)}{ج-ا} = \frac{ج جب (ا-ب)}{ا-ب}$$

$$ا جب ب - ب جب ج + ج جب ا - ا جب ب =$$

$$+ ج جب ج - ا جب ب =$$

$$ا (جم ب - جم ج) + ب (جم ج - جم ا)$$

$$+ ج (جم ا - جم ب) =$$

$$\frac{ب-ج}{ج} جب ا + \frac{ج-ا}{ا} جب ب$$

$$+ \frac{ا-ب}{ب} جب ج =$$

$$\frac{ج}{ج} = \frac{ا+ب-ج}{ا+ب+ج}$$

$$\frac{ج}{ج} = \frac{ا+ب-ج}{ا+ب+ج}$$

$$ا جم (ب-ج) + ب جم (ج-ا) + ج جم (ا-ب)$$

$$= ا ب ج$$

۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع ۳، ۴، ۵ فٹ ہوں تو ثابت کرو

س کا سب سے بڑا زاویہ ۱۲۰ سے بڑا ہوگا۔

- ۲۳۔ ایک مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع ۲۱ اور ۲۸ فٹ ہیں، اگر قائم الزاویہ سے وتر پر عمود لگایا جائے تو اس کا طول دریافت کرو
- ۲۴۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱:۲:۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے مقابل کے اضلاع کی نسبتیں ۱:۳:۲ ہوں گی۔
- ۲۵۔ اگر کسی مثلث میں

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{b}{c} = \frac{1}{3}$$

- تو مس $\frac{a}{b}$ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس مثلث میں $\angle A + \angle B = 90^\circ$
- ۲۶۔ کسی مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین میں ایک مستقیم خط مساوی ضلعوں میں سے ایک کے نقطہ وسط کو مقابل کے زاویے سے وصل کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ زاویے کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کا تناسب تمام ۲ اور ۳ ہیں

- ۲۷۔ کسی مثلث $\triangle ABC$ میں عمود AD قاعدے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے کہ خطوط BD اور CD کی باہمی نسبتیں ۲:۳:۶ ہیں، ثابت کرو کہ مثلث کا زاویہ $\angle A$ 90° ہے

- ۲۸۔ ایک ذرہ حلقہ کا قطر ۱۰ انچ ہے اور وہ ایک نقطہ سے جس کا راسی فاصلہ مرکز سے ۱ فٹ ہے چھ مساوی رسیوں کے ذریعہ جو محیط کے برابر برابر فاصلوں پر بندھی ہوئی ہیں آدیناں ہے، متصل رسیوں کے درمیانی زاویہ کی جیب اتمام دریافت کرو۔

- ۲۹۔ اگر $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

- ۳۰۔ اگر $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

ہو گئے

- اگر 'ب' 'ج' سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ثابت کر دو کہ
 ۱/۲ 'ج' ۱/۲ اور 'ج' ۱/۲ جی سلسلہ موسیقی میں ہو گئے
 ۱- ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا اور
 ۰ سے چھوٹا زاویہ بالترتیب طہ اور فہ ہے ثابت کر دو کہ

$$۳ (۱-جم طہ) (۱-جم فہ) = جم طہ + جم فہ$$

- ۲- ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے
 اوپر سب سے چھوٹے زاویے سے قدر ۹۰ کے زیادہ ہے ثابت کر دو
 اضلاع ۱۲ + ۱۲ اور ۱۲ - ۱ کے متناسب ہیں
 ۳- اگر ج = ۹۰ تو ثابت کر دو کہ

$$\frac{۳}{۱+ج+ب} = \frac{۱}{ب+ج} + \frac{۱}{۱+ج+ب}$$

- ۱- اگر کسی مثلث کا ب ج میں قاعدہ ب ج پر ایک ایسا
 د مقرر کریں کہ ب د : ج د :: م : ن اور اگر
 ب د = ع د : ج د = ب د = ج د = طہ اور
 : = لا تو ثابت کر دو کہ

$$(م + ن) (م طہ) = م م ع - ن م ب$$

$$= ن م ب - م م ج$$

$$(م + ن) \times لا = (م + ن) (م ب + ن ج) - م ن لا$$

- ۲- اگر کسی مثلث میں ضلع ج کا منصف ضلع م ب پر عمود ہو تو
 یہ کر دو کہ ۲ مس لا + مس ج = ۰

۳۷۔ ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں ط کوئی زاویہ ہو تو

$$\text{ب} \text{ جھم ط} = \text{ج} \text{ جھم (ا - ط)} + \text{ا} \text{ جھم (ج + ط)}$$

۳۸۔ اگر کسی مثلث کے زاویوں ا اور ب سے دو عمود ع اور م ایک ایسے خط پر نکالے جائیں جو مثلث کے پاس ج میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا} \text{ ع} + \text{ب} \text{ م} - \text{ا} \text{ ب} \text{ ع م جھم ج} = \text{ا} \text{ ب} \text{ جھم ج}$$

۳۹۔ کسی مثلث ا ب ج میں خطوط و ا، و ب اور و ج اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

$$\text{ا} \text{ و ا ب} = \text{ا} \text{ و ب ج} = \text{ا} \text{ و ج ا} = \text{سہ}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{م م سہ} = \text{م م ا} + \text{م م ب} + \text{م م ج}$$

$$\text{اور} \quad \text{ق م سہ} = \text{ق م ا} + \text{ق م ب} + \text{ق م ج}$$



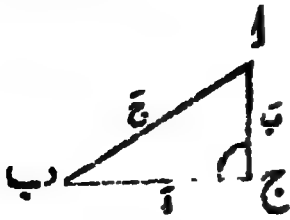
باب سینہ دہم

مثلثوں کا حل

۱۔ کسی مثلث کے تین ضلعوں اور تین زاویوں کو
ث کے اجزا کہتے ہیں اگر کوئی سے تین اجزا کسی مثلث
معلوم ہوں بشرطیکہ وہ تین زاویے نہ ہوں تو باقی اضلاع
یا دوئے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن جب تین زاویے معلوم
ہوں تو صرف اضلاع کے طولوں کی باہمی نسبتیں معلوم ہو سکتی
یعنی مثلث کی شکل دریافت ہو سکتی ہے اور مقدار نہیں
م ہو سکتی، جب مثلث کے تین اجزا معلوم ہوں تو باقی
اجزا معلوم کرنے کے عمل کو مثلث کا حل کہتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم مثلث قائم الزاویہ کے حل پر بحث
کریں گے۔ مثلث قائم الزاویہ وہ ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو
یا کی چاروں فعات ایسے مثلثات کے متعلق ہیں، زاویہ ج
ہے۔

۱۔ صورت اول۔ مثلث قائم الزاویہ کا وتر اور ایک
معلوم ہے مثلث کو حل کرو۔



فرض کرو کہ ضلع ب اور وتر

ج معلوم ہیں،

رابط جب ب = $\frac{ب}{ج}$ سے

زاویہ ب معلوم ہو سکتا

ہے۔

ل جب ب = ۱۰ + لوک ب - لوک ج

اب چونکہ ب اور ج معلوم ہیں اس لئے ل جب ب اور ب

معلوم ہو سکتے ہیں اور اس لئے زاویہ ا (= ۹۰ - ب) معلوم

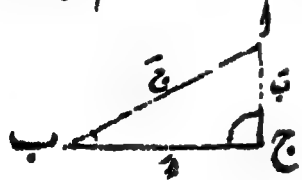
ہو سکتا ہے۔

ضلع ا و ب کے کسی ایک رابط سے معلوم ہو سکتا ہے

ج ب = $\frac{ج}{ب}$ 'مس ب = $\frac{ب}{ج}$ یا ا = $\sqrt{(ج - ب)(ج + ب)}$

۱۸۲ - صورت دوم - اضلاع ا اور ب معلوم ہیں ثلث

کو حل کرو۔



اس صورت میں زاویہ ب رابط مس ب = $\frac{ب}{ج}$

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

یعنی ل مس ب = ۱۰ + لوک ب - لوک ا

اس لئے ل مس ب اور اس لئے ب معلوم ہو سکتا ہے

نیز زاویہ ا (= ۹۰ - ب) معلوم ہو سکتا ہے

رابط ج = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ سے وتر ج دریافت ہو سکتا ہے

لیکن یہ رابط لوکار مٹی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں ہے

ترجہ دریافت کرنے کے لئے طریق ذیل بہتر ہوگا۔

$$\text{جب } \frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ج} \text{ یعنی } \frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ج}$$

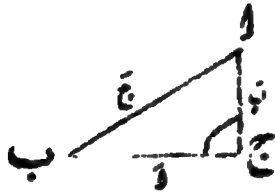
لوک ج = لوک ب - لوک جب ب

$$= ۱۰ + \text{لوک ب} - \text{لوک جب ب جس سے ج معلوم}$$

ہو سکتا ہے

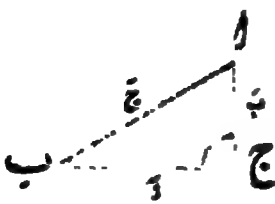
۱۸۲ - صورت سوم - مثلث کا زاویہ ب اور ایک ضلع

معلوم ہے، مثلث کو حل کرو



۱۸۳ - صورت چہارم - زاویہ

ب اور وتر ج معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔



معلوم ہے اور اضلاع اور ب اور ب ارتباطات سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\frac{ب}{ج} = \text{جم ب اور } \frac{ب}{ج} = \text{جب ب}$$

۱۔ مسئلہ نمبر ۲۸

- مثلث قائم الزاویہ ا ب ج میں ج قائمہ ہے، اگر $\angle A = ۵۰^\circ$ اور

$$۲۵ = ۲ + ۳۲$$

- مثلث کے دو ضلع ۱۰ اور ۲۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ

۹. ہے مثلث کو حل کرو۔ معلوم ہے کوک $۲۰ = ۱۰۳ - ۱۵۳$

اور ل مس $۲۶ = ۳۳ = ۹۵۹۸۴۸۳۷$

نیز فرق آ کے لئے $۳۱۶۰ =$

۳۷۔ اگر مثلث کے ایک زاوے سے اس کے قاعدے پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۳ پانچ ہوتا ہے اور اس زاویہ کو احاطہ کرنے والے اضلاع کے طول ۴ اور ۵ پانچ ہیں، مثلث کے زاوے دریافت کرو۔

معلوم ہے کوک $۲ = ۱۰۳ - ۱۰۱$ ، کوک $۳ = ۱۲۱۳ - ۱۱۷$

ل جب $۳۶ = ۵۲ = ۹۵۷۷۸۱۱۸۶$ فرق آ کے لئے $۱۶۸۳ =$ اور

ل جب $۲۸ = ۳۵ = ۹۱۸۷۵۰۱۴۲$ فرق آ کے لئے $۱۱۱۵ =$

۴۷۔ ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر اس عمود کا چار گنا ہے جو زاویہ قائمہ سے وتر پر نکالا جائے، مثلث کے حادے زاوے دریافت کرو۔

۱۸۵۔ اب ہم ایسے مثلثوں کے حل کے متعلق بحث کریں گے جن کا کوئی زاویہ قائمہ نہ ہو۔

اس کی مختلف صورتیں یہ ہیں

صورت اول۔ تین اضلاع معلوم ہیں

صورت دوم۔ دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہے

صورت سوم۔ دو اضلاع اور ایک کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے

صورت چہارم۔ ایک ضلع اور دو زاوے معلوم ہیں

صورت پنجم۔ تینوں زاوے معلوم ہیں۔

۱۸۶۔ صورت اول تینوں اضلاع کو 'ا' 'ب' 'ج' معلوم ہیں

چونکہ اضلاع معلوم ہیں اس لئے ن اور اس لئے مقادیر

ن - ۱ - ۱ - ن - ب - ن - ج معلوم ہیں - نصف زاوے $\frac{1}{2}$ ،
 پ ، ج ذیل کے مضابطوں سے معلوم ہو سکتے ہیں -

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{(ن - ب)(ن - ج)}{(ن - ۱)}$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{(ن - ج)(ن - ۱)}{(ن - ب)} \text{ اور مس } \frac{1}{2} = \frac{(ن - ۱)(ن - ب)}{(ن - ج)}$$

صرف دو زاویوں کا دریافت کرنا کافی ہوگا کیونکہ ان دو کے مجموعہ کو
 ۱۸۰ سے تفریق کرنے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے -

اوپر کے زاویوں کی قیمتیں نصف زاویوں کی جیب یا جیب التمام
 کے مضابطوں کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں دیکھو

دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

یہ سب مضابطے لوکارتمی حسابات کے لئے موزوں ہیں -

$$\text{نیز زاویہ ۱ مضابطہ حجم ۱} = \frac{ب^۱ + ج^۱ - ۱^۱}{۲ ب ج} \text{ (دفعہ ۱۷۰) سے بھی معلوم}$$

ہو سکتا ہے -

لیکن بالعموم یہ مضابطے لوکارتمی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہوتا
 مگر جب اضلاع ۱، ۲، ۳ مقدار میں قلیل ہوں تو اُس وقت اس
 مضابطے کو استعمال کرنے میں سہولت ہوگی -

مثال - ایک مثلث کے اضلاع ۳۲، ۴۰، ۶۶ فٹ ہیں، سب سے بڑے

ضلع کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $۲۰۷ = ۲۳۱۵۹۷۰۳$ ' لوک $۱۰۷۳ = ۳۵۰۳۰۵۹۹۷$
 ل مم $۹۶ = ۱۸ = ۳۳۱۳۳۳۳۱$ ' جدولوں سے فرق آ کے لئے $۳۳۳۱ =$
 اس جگہ $۳۲ =$ ' ب $۳۰ =$ ' ج $۶۶ =$
 یعنی ن $= \frac{۶۶ + ۳۰ + ۳۲}{۴} = ۶۹ =$ ' ن - $۳۷ =$ ' ن - ب $۲۹ =$
 اور ن - ج $= ۳ =$

اس لئے مم $\frac{ج}{۲} = \frac{(ن - ج)}{(ن - (ب))} = \frac{۳ \times ۶۹}{۲۹ \times ۳۷} = \frac{۲۰۷}{۱۰۷۳}$
 ل مم $\frac{ج}{۲} = ۱۰ + \frac{۱}{۲} [لوک - ۲۰۷]$
 $۱۵۱۵۲۹۹۸۵ - ۱۵۱۵۷۹۸۵۱۵ + ۱۰ =$
 $۹۱۶۴۲۶۸۵۳ =$

ل مم $\frac{ج}{۲}$ اس لئے ل مم $۹۶ = ۱۸$ سے بڑا ہے یعنی $\frac{ج}{۲}$ زیادہ $۹۶ = ۱۸$ سے کم ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{ج}{۲} = ۹۶ = ۱۸ - لا$
 زیادہ کی قیمت کا فرق لا ہے اس کے مقابل لوکار تم کا فرق

$$\begin{array}{r} ۹۱۶۴۲۶۸۵۳ = \\ ۹۱۶۴۲۳۳۳۱ - \\ \hline ۵۰۰۰۲۵۱۲ = \end{array}$$

نیز فرق ۹۰ کے لئے $۵۰۰۰۳۳۳۱ =$

اس لئے $\frac{لا}{۹۰} = \frac{۵۰۰۰۲۵۱۲}{۵۰۰۰۳۳۳۱}$

یعنی لا $= ۹۰ \times \frac{۲۵۱۲}{۳۳۳۱} = ۴۴$ تقریباً

$14 \ 16 \ 18 = 54 - 18 \ 18 = \frac{36}{2} \therefore$
 $54 \ 54 \ 54 = 3$ اور اس لئے ج

۱. مثلہ نمبری ۲۹

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و'، 'ز') کے نتائج کی تصدیق عملی ترمیمی سے کرنی چاہیئے]

۱۔ ایک فٹ کے اضلاع ۵۶، ۶۵، ۳۳ فٹ ہیں اس کا سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۲۔ خلت کے اضلاع بالترتیب ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰،

۳۔ ایک مثلث کے اضلاع $1 + \sqrt{2}$ ، $1 + \sqrt{2}$ اور 1 ہیں تاہم
 کر دو کہ بڑے سے بڑا زاویہ 120° ہے۔

۳۔ خلت کے اصلاَح و 'ب' ، 'م' و 'ب' + 'ب' فٹ ہیں سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر $u = 2$ ، $b = 6$ اور $c = 13$ ۔ تو مثلث کو حل کرو۔

۴۔ اگر $r = 2$ ، $b = 4$ اور $j = 3$ ، تو مثلث کو حل کرو۔

۷۔ اگر $a = 9$ ، $b = 10$ ، $c = 11$ تو ب معلوم کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۷

۹۵۲۳۴۵۶ = ۲۹۲۹ لیس

اور لمس ۲۹ = ۳۰۲۶۵۹

۸۔ ایک خٹ کے اضلاع ۱۳۰، ۱۲۳، ۷۷ فٹ ہیں، سب سے بڑا

زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰.۱۰۳ \text{ ' ل مس } ۳۸ = ۳۹ \text{ ' } ۹۵۹۰۲۹۳۷۶ =$$

$$\text{اور ل مس } ۳۸ = ۴۰ \text{ ' } ۹۵۹۰۳۱۹۶۶ =$$

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲۳۲، ۱۸۸، ۲۷۰ فٹ ہیں سب سے

بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰.۱۰۳ \text{ ' لوک } ۳ = ۳۷۷۷۱۲۱۳ =$$

$$\text{لوک } ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ = \text{ ل مس } ۳۸ = ۲۰ \text{ ' } ۹۵۸۹۸۰۱۰۳ =$$

$$\text{اور ل مس } ۳۸ = ۱۹ \text{ ' } ۹۵۸۹۷۷۵۰۷ =$$

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲، ۳، ۴ ہیں سب سے بڑا زاویہ دریافت

کرو۔ معلوم ہے

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰.۱۰۳ \text{ ' لوک } ۳ = ۳۷۷۷۱۲۱۳ =$$

$$\text{ل مس } ۲ = ۱۴ \text{ ' } ۱۰۸۳۹۵ =$$

$$\text{اور ل مس } ۲ = ۱۵ \text{ ' } ۱۰۸۱۱۱۰۰۴ =$$

حیدروں کو استعمال کرنے سے ان مثلثوں کے سب زاویے دریافت

کرو جن میں

$$۱۱۔ ۱ = ۲۵ \text{ ' ب } = ۲۶ \text{ ' ج } = ۲۷$$

$$۱۲۔ ۱ = ۱۷ \text{ ' ب } = ۲۰ \text{ ' ج } = ۲۷$$

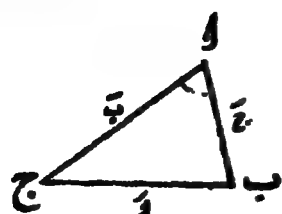
$$۱۳۔ ۱ = ۲۰۰ \text{ ' ب } = ۱۰۵۰ \text{ ' ج } = ۱۱۵۰$$

۱۸۔ صورت دوم۔ دو اضلاع ب اور ج معلوم ہیں

اور ان کا درمیانی زاویہ ا بھی معلوم ہے، مثلث کو حل

کرو۔

فرض کرو کہ ضلع ب ضلع ج
بڑا ہے تب



$$\text{مس ب-ج} = \frac{\text{ب-ج}}{\text{ب+ج}} \text{م} \frac{1}{2} \text{ (دفعہ ۱۷۷) (۱)}$$

(۲) $\frac{1}{2} - 9 = \frac{7+4}{2}$

دور بطوں سے $\frac{b-j}{2}$ اور $\frac{b+j}{2}$ کی قیمتیں اور اسلئے

اور تفریق کرنے سے ب اور ج کی قیمتیں حاصل ہونگی

اس کے بعد تیسرا ضلع اور چارواں چب $\frac{1}{4}$ چب سے حاصل

یعنی اے = ب \times جب $\frac{1}{ب}$ جس سے اے حاصل ہوگا

۱۰ ضابطہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتا ہے

$$١' = ب' + ج' - ۲بج جم$$

ابطالہ لوکار متنی حسابات کے لئے آنا موزوں نہیں، لیکن صورت میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے جبکہ اضلاع و اورد مقدار میں نہایت ہی قلیل ہوں۔

۱۱۔ مثال ۱۔ اگر $b = 3$ ، $c = 1$ اور $a = 2$ تو خشت کو

$$\text{مس} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \times \frac{۱}{۲} \text{ مم} = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{۱ + \sqrt{۲}} \text{ مم} = ۱۵$$

$$\text{اب مس} = ۱۵ = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{۱ + \sqrt{۲}} \text{ (دفعہ ۱۰۷)}$$

$$\text{یعنی مم} = ۱۵ = \frac{۱ + \sqrt{۲}}{۱ - \sqrt{۲}}$$

$$\text{اس لئے مس} = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = ۱$$

$$\text{.....} \frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = ۲۵ \text{ (۱)}$$

$$\text{نیز} \frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} = ۹۰ = \frac{۱}{۲} - ۹۰ = ۱۵ - ۹۰ = ۷۵ \text{ (۲)}$$

جمع کرنے سے ب = ۱۲۰

تفریق کرنے سے ج = ۳۰

چونکہ ۱ = ج ، اس لئے ۱ = ج = ۱

یا بطریق ذیل

$$۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۲} - ۱ + ۳ = ۱ \text{ جم} = ۱ \text{ ب} + ۲ \text{ ج} = ۱$$

یعنی ۱ = ج

$$\text{.....} ج = ۱ = ۳۰$$

$$\text{اور ب} = ۱۸۰ - ۱ - ج = ۱۲۰$$

مثال ۲۔ اگر ب = ۲۱۵ ، ج = ۱۰۵ اور ۱ = ۲۴ ، ۲۷ تو باقی دو

زادے ، نیز تیسرا ضلع دریافت کرو۔ معلوم ہے

$$\text{لوک} = ۲ = ۳۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰ ، \text{لوک} = ۱۱ = ۹۲۷۳۰ - ۳۰۰۰۰$$

$$\text{لوک} = ۱۰۵ = ۲۱۸۹۳ - ۲۵۰۰۰ ، \text{لوک} = ۲۱۲ = ۳۷۷۳۰ - ۳۵۰۰۰$$

$$۳۴۲۲ = ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳ \text{ ' فرق آ کے لئے } = ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳$$

$$۳۳۴۲ = ۳۳۴۱۱۱۹۳۴۲۳ \text{ ' فرق آ کے لئے } = ۳۳۴۱۱۱۹۳۴۲۳$$

$$۹۱۹۸۳۸۰۵۲ = ۲۴$$

$$۲۳۳۲ = ۲۳۳۱۱۱۹۳۴۲۳ \text{ ' فرق آ کے لئے } = ۲۳۳۱۱۱۹۳۴۲۳$$

$$\text{بگس } \frac{ب-ج}{۲} = \frac{ج-ب}{ج+ب} \text{ مم } \frac{۱}{۲} = \frac{۱۱}{۳۲} \text{ مم } ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳$$

$$\text{ل مم } ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳ = ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳$$

$$\text{فرق } ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳ = ۱۳۱۱۱$$

$$\text{مم } ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳ = ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳$$

$$\text{لوک } ۱۱ = ۱۱۱۳۹۲۴$$

$$۱۱۱۳۹۲۴$$

$$\text{لوک } ۳۲ = ۱۱۱۳۹۲۴$$

$$\text{س } \frac{ب-ج}{۲} = ۹۱۹۸۳۸۰۵۲$$

$$\text{ل س } ۲۴ = ۹۱۹۸۳۸۰۵۲$$

$$\text{فرق } ۲۳۴۲ = ۲۳۴۲$$

$$\text{فرق } \frac{۲۳۴۲}{۳۳۴۲} \times \frac{۱}{۴} \text{ کے لئے } =$$

$$\text{فرق } \frac{۲۳۴۲}{۳۳۴۲} \text{ کے لئے } =$$

$$\frac{ب-ج}{۲} = ۲۴ \text{ ' } ۲۴ = ۲۴$$

$$\frac{ب+ج}{۲} = ۹۱۹۸۳۸۰۵۲ = \frac{۱}{۲} - ۹۱۹۸۳۸۰۵۲$$

$$\begin{array}{r} ۳۴۱۳۱۱۹۳۴۲۳ \\ ۵ \\ \hline ۱۵۵۰۵۱۵ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۲۳۴۲ \\ ۴۰ \\ \hline ۳۳۴۲ \\ ۱۳۴۵۹ \\ \hline ۴۱۹۰ \\ ۹۶۲۸ \\ \hline ۲۳۴۰ \end{array}$$

۱۸۹۔ مثلث کے دو سرے سے دے دے

اور تقریب کرنے سے ج = ۲۸ ۲۵ ۲۸

غیر جب $\frac{1}{2} = \frac{ج}{ج} = ج$ تم ج

∴ ۱۰۵ جب ۲۸ ۲۵ ۲۸ تم ۲۸ ۲۵ ۲۸

لیکن ل تم ۲۸ ۲۵ ۲۸ = ۱۰۵ ۳۲۷۵۰۲۵

فرق ۲۸ کیلئے = ۱۸۹۶

$$۲۳۳۴ \times \frac{۲۸}{۴}$$

$$۲۳۳۴ \times \frac{۲}{۵} =$$

$$۱۸۹۶ =$$

$$۱۰۵ ۳۲۷۳۱۵۸ = ۲۸ ۲۵ ۲۸$$

$$۹۵۹۸۳۸۰۵۲ = ۲۵ ۲۸ ۲۵$$

$$۲۵۰۲۱۱۸۹۳ = ۱۰۵$$

$$۲۲۵۳۲۴۳۱۰۳$$

$$۲۰$$

$$۲۲۵۳۲۴۳۱۰۳ = ۲۰$$

$$۲۱۲۵۴۶۹ = ۲۰$$

۱۸۹۔ صورت دوم میں مثلث کا قیصر اصنع و زاویوں ب اور ج کو

دریافت کرنے کے بغیر بھی معلوم ہو سکتا ہے۔ دو طریقے حسب ذیل ہیں

$$(۱) \text{ چونکہ } ۲ = \frac{ب}{ج} + \frac{ب}{ج} - ۲ \text{ ب ج جم}$$

$$= \frac{ب}{ج} + \frac{ب}{ج} - ۲ \text{ ب ج جم} = (۱ - \frac{۱}{۲} \text{ جم})$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ جم} - ۲ \text{ ب ج جم} =$$

$$\therefore ۱ = \frac{ب}{ج} + \frac{ب}{ج} - ۱ \left[\frac{۱}{۲} \text{ جم} - \frac{۲}{۲} \text{ ب ج جم} \right]$$

$$\text{اس لئے اگر جیسا ط} = \frac{۱}{۲} \text{ جم} - \frac{۲}{۲} \text{ ب ج جم}$$

$$\text{تو } (ب + ج) = [۱ - جب ط] = (ب + ج) \text{ جم ط}$$

$$\text{یعنی } (ب + ج) = \text{جم ط}$$

$$\text{پس اگر جب ط کو ربط جب ط} = \frac{۲۲ (ب + ج) \text{ جم ط}}{ب + ج} \text{ سے معلوم کیا جائے تو حاصل ہوگا}$$

$$و = (ب + ج) \text{ جم ط}$$

$$(۲) و = ب + ج - ۲ ب ج \text{ جم } ۱$$

$$= ب + ج - ۲ ب ج (۱ - ۲ جب \frac{۱}{۲}) = (ب - ج) + ۲ ب ج جب \frac{۱}{۲}$$

$$= (ب - ج) [۱ + \frac{۲ ب ج}{(ب - ج)} جب \frac{۱}{۲}]$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{۲ ب ج}{(ب - ج)} جب \frac{۱}{۲} = \text{مس } ۲$$

$$\text{یعنی مس } ۲ = \frac{۲۲ (ب + ج) \text{ جم ط}}{ب - ج}$$

اس لئے ۲ معلوم ہو سکتا ہے

$$\text{نیز } (ب - ج) = [۱ + \text{مس } ۲] = \frac{(ب - ج) \text{ جم } ۲}{\text{جم } ۲}$$

$$\text{یعنی } و = (ب - ج) \text{ قط } ۲$$

اس سے و آسانی معلوم ہو سکتا ہے

اس دفعہ کے حسابات میں زاوئے ط اور ۲ تسبیل حل کے لئے داخل کئے گئے ہیں ان کو امدادی زاوئے کہتے ہیں (دفعہ ۱۳۵)

امثلہ نمبری ۳۰

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۶، ۱۱) کے نتائج کی تصدیق ترتیبی عمل سے کرنی چاہیے]

۱۔ اگر $b = 90^\circ$ ، $c = 40^\circ$ اور $d = 22^\circ$ ، $a = 30^\circ$ تو b اور c دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.10.3$ ، L مم 4 ، 23 ، 15 ، $10.5.13.23.11$

مس 9 ، $34 = 41$ ، $9.22.9..41$

اور L مس 9 ، $38 = 35$ ، $9.22.9.44.35$

۲۔ اگر $b = 71^\circ$ ، $c = 11^\circ$ اور $j = 34^\circ$ ، 22° ، 30° تو d اور b دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.10.3$

اور L مس 22 ، 38 ، $25 = 15$ ، $10.5.5.15$

۳۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے اضلاع کے طول بالترتیب 22 اور 14 فٹ ہوں تو مثلث کے زاوئے دریافت کرو، نیز تیسرے ضلع کا طول معلوم کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.10.3$ ، لوک $3 = 34.44.12.13$

اور L مس 19 ، $4 = 28$ ، $9.5.3.9.28.4$ فرق آکے گئے 40.84

۴۔ اگر $b = 13^\circ$ ، $c = 4^\circ$ اور $j = 90^\circ$ تو d اور b کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

اور ل جب $۹۴۹ \text{ } ۲۷ \text{ } ۳۳ = ۹۵۸۸۰۷۹$

۹- اگر $۱ = ۲$ ، ب $= ۱ + ۳۲$ اور ج $= ۹۰$ تو مثلث کو حل کرو۔

۱۰- مثلث کے دو اضلاع $۳۲ + ۱$ اور $۳۲ - ۱$ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۹۰ ہے، تیسرا ضلع اور باقی زاوے دریافت کرو

۱۱- اگر ب $= ۱$ ، ج $= ۳۲ - ۱$ اور $۱ = ۹۰$ تو ضلع ۱ کا طول دریافت کرو

۱۲- اگر ب $= ۹۱$ ، ج $= ۱۲۵$ اور $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ تو ثابت کرو کہ $۱ = ۲۰۳$

۱۳- اگر $۱ = ۵$ ، ب $= ۴$ اور حجم $(۱ - ب) = \frac{۲۱}{۳۲}$ تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع

ج $= ۶$

۱۴- ایک مثلث کا ایک زاویہ ۳۰ ہے اور اس کے متصل ضلعوں کے

طول ۴۰ اور ۴۰ ہیں، تیسرے ضلع کا طول دریافت کرو نیز باقی زاویوں میں انگریزی درجوں کی تعداد معلوم کرو

۱۵- ایک مثلث کے اضلاع ۹ اور ۳ ہیں اور ان کے مقابل کے

زاویوں کا فرق ۹۰ ہے، مثلث کا قاعدہ اور اس کے زاوے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $۲ = ۳۰۱۰۳$ ، لوک $۳ = ۳۷۷۱۲۱۳$

لوک $۴ = ۷۵۸۹۳$ ، $۴۵۸۹۳ = ۴۷۸۸۰۲۰۷۴$ ، لوک $۵ = ۷۵۸۹۵$ ، $۷۵۸۹۵ = ۴۷۸۸۰۲۱۳۲$

ل مس $۲۹ \text{ } ۳۳ = ۹۵۹۹۸۶۸۴$

اور ل مس $۲۹ \text{ } ۳۳ = ۹۵۹۹۰۰۰۶$

۱۶- اگر $\frac{۱}{۲} = \frac{ب}{۱ + ب}$ ، $\frac{۱}{۲} = \frac{ج}{۱ + ج}$ تو ثابت کرو کہ

ج $= (۱ + ب) \frac{ج}{ب}$
محمد

اگر $1 = 3$ ، $b = 1$ اور $c = 3$ اور $e = 28$
 تو d اور b کو دریافت کرنے کے بغیر c دریافت کرو، معلوم ہے
 لوک $2 = 30.103$ ، لوک $25298 = 30.842$ اور 30.303
 لوک $25299 = 30.310$ اور 30.333 ، $\log 25298 = 30.842$
 اور $\log 25299 = 30.843$
 ایک مثلث کے دو اضلاع 234 اور 158 فٹ ہیں اور
 ان کا درمیانی زاویہ 96° ہے، قاعدہ اور باقی زاوے دریافت کرو،
 معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، لوک $49 = 1.894$
 لوک $22984 = 30.355$ اور $\log 22984 = 30.355$
 ل جب $23 = 20.399$ اور $\log 23 = 20.399$
 ل $14 = 1.141$ اور $\log 14 = 1.141$
 اور ل $14 = 1.141$ اور $\log 14 = 1.141$

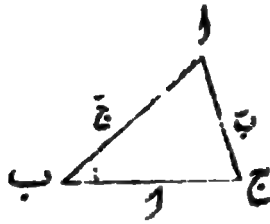
اضابطہ $\frac{b}{c} = \frac{a}{p}$ جب $\frac{a}{p}$ کو استعمال کرو یا اضابطہ $\frac{p}{a} = \frac{b}{c}$ کو استعمال کرو
 ذیل کی چار مثالوں میں مطلوبہ لوکاریتوں کو جدولوں سے لے

۱۸۔ اگر $1 = 222.5$ ، $b = 3$ اور $c = 143$ اور $e = 34$ تو
 مثلث کو حل کرو

۱۹۔ اگر $b = 130$ ، $c = 93$ اور $d = 15$ ، تو مثلث
 کو حل کرو

۲۰۔ مثلث کے دو اضلاع 22984 اور 158 فٹ ہیں اور ان کا
 درمیانی زاویہ 96° ہے، باقی زاوے دریافت کرو

- ۲۱۔ مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷ و ۹۶ اور ۱۳۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۷° ہے، باقی زاویے دریافت کرو۔
- ۱۹۰۔ صورت سوم۔ دو اضلاع ب و ج اور ج معلوم ہیں اور ان میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ ب معلوم ہے، مثلث کو حل کرو۔



$$\text{زاویہ ج ربط} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جب ب}} = \frac{c}{b}$$

یعنی جب ج = بچ جب ب (۱)

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

طرفین کے لوکار تم لینے سے زاویہ ج معلوم ہو سکتا ہے اور پھر ۱۸۰ - ب - ج جس سے ا حاصل ہوتا ہے

$$\text{ضلع آ ربط} = \frac{\text{جب آ}}{\text{جب ب}} = \frac{a}{b}$$

یعنی آ = ب جب آ جب ب (۲)

سے دریافت ہو سکتا ہے۔

۱۹۱۔ دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) سے بعض صورتوں

میں ج کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور بعض دفعہ ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور بعض دفعہ دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں صورت اول - فرض کرو کہ زاویہ ب حادہ ہے

(ا) اگر \angle ج جب ب تو مساوات (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک سے بڑا ہوگا اور اس مساوات کے موافق ج کی کوئی قیمت نہیں ہو سکتی۔

(ب) اگر \angle ج جب ب تو (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک کے برابر ہوگا اور اس صورت میں ج کی قیمت ۹۰ درجہ ہوگی۔ (ج) اگر \angle ج جب ب تو ج کی دو قیمتیں ایسی ہونگی جن میں

سے ہر ایک کی جیب \angle ج جب ب ہوگی، ایک قیمت ۰ اور ۹۰

کے درمیان واقع ہوگی اور دوسری ۹۰ اور ۱۸۰ کے درمیان لیکن یہ دونوں قیمتیں ہمیشہ شرائط سوال کو پورا نہیں کریں گی۔

کیونکہ اگر \angle ج تو ب کے ج ' اب اس صورت میں ج کی منفرد قیمت جائز نہیں ہو سکتی کیونکہ ج زاویہ منفرجہ نہیں ہو سکتا جب تک کہ ب زاویہ منفرجہ ہو اور ایک ہی مثلث میں دو زاویوں میں سے ہر ایک کا قائمہ سے بڑا ہونا صحیح ناممکن ہے۔

اگر \angle ج اور زاویہ ب حادہ ہو تو ج کی دونوں قیمتیں شرائط سوال کو پورا کریں گی اس صورت میں ۱ کی دو قیمتیں ہونگی اور اس لئے ارتباط (۲) سے ۱ کی بھی دو قیمتیں حاصل

ہونگی اور اس لئے دو مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرین گے۔
 صورت دوم۔ فرض کرو کہ ب منفرد ہے
 اگر \angle یا \angle تو ب بالترتیب کم ہوگا یا برابر ہوگا ج کے
 اس لئے ج زاویہ منفرد ہوگا اس صورت میں مثلث کا بنتا ہی
 ناممکن ہوگا

اگر \angle کے \angle تو زاویہ ج کی حادہ قیمت جو مساوات (۱) سے
 حاصل ہوگی شرائط سوال کو پورا کرے گی مگر منفرد قیمت جائز
 نہیں ہوگی اس صورت میں مثلث کا صرف ایک جائز حل ہوگا
 چونکہ \angle اور ب کی بعض قیمتوں کے لئے مثلث کے
 حل کرنے میں شک یا اشتباہ واقع ہوتا ہے اس لئے اس
 صورت کو مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت کہتے ہیں

۱۹۲۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق ہندسی اس طرح ہو سکتی ہے
 فرض کرو کہ اجزاء \angle اور ب معلوم ہیں اور ہم مثلث کو بنانے
 کی کوشش کرتے ہیں۔

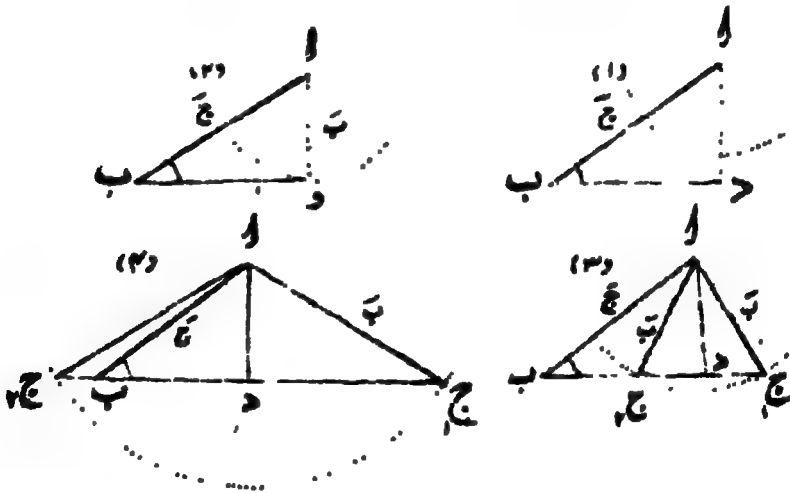
سب سے اول زاویہ \angle اور \angle برابر زاویہ ب کے بناؤ اسکے
 بعد سمت ب \angle میں طول ب \angle کو ج کے مساوی قطع کرو اس
 طرح سے زاویہ \angle کا نقطہ \angle اس معلوم ہو جائے گا۔

اب ہمیں ایک تیسرا نقطہ ج معلوم کرنا ہے جو ب \angle پر واقع ہو
 اور جس کا فاصلہ نقطہ \angle سے ب کے برابر ہو، اس نقطہ کا مقام
 دریافت کرنے کے لئے \angle کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جس کا
 نصف قطر ب ہو، اب اگر یہ دائرہ ب \angle کو قطع کرے تو جو

نقطہ یا نقاط تقاطع اس طرح حاصل ہونگے ان سے ج کا مقام معلوم ہو جائے گا
ب د پر عمود ا د نکالو پس

$$ا د = ا ب جب ب = ج جب ب$$

ذیل کی صورتوں میں سے ایک نہ ایک پیدا ہوگی
ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو قطع نہ کرے (شکل اول)
یا ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو مس کرے (شکل دوم)
یا دائرہ ب د کو دو نقطوں ج اور ج پر قطع کرے (شکل سوم و چارم)



پہلی شکل سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں کوئی ایسا مثلث نہیں ہو سکتا جو شرائط مطلوبہ کو پورا کرے

اس صورت میں $ا د > ا ب$ یعنی $ج جب ب > ج جب ب$
دوسری شکل سے ایک مثلث ا ب د حاصل ہوتا ہے جس میں

زاویہ د قائمہ ہے

اس صورت میں $\angle \text{ب} = \angle \text{ا} = \angle \text{ج}$ جب ب
تیسری شکل سے دو مثلث ا ب ج اور ا ب ج حاصل ہوتے ہیں
اس صورت میں $\angle \text{ب}$ بلحاظ مقدار کے $\angle \text{ا}$ اور $\angle \text{ج}$ کے درمیان
واقع ہے یعنی

$\angle \text{ب} < \angle \text{ج}$ جب ب اور $\angle \text{ج}$

چوتھی شکل میں صرف ایک مثلث ا ب ج ایسا ہے جو شرائط
سوال کو پورا کرتا ہے،

[مثلث ا ب ج شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کرتا کیونکہ اس میں
مقام ب پر جو زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ ب کے برابر نہیں لیکن
وہ زاویہ ۱۸۰° - $\angle \text{ب}$ کے برابر ہے] ظاہر ہے کہ اس صورت میں
مقدار $\angle \text{ب}$ مقدیر $\angle \text{ج}$ جب ب اور $\angle \text{ج}$ دونوں سے بڑی ہے۔

اگر زاویہ ب منفرج ہو تو مناسب شکلیں کھینچنے سے معلوم ہوگا
کہ اگر $\angle \text{ب} > \angle \text{ج}$ تو کوئی مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کر سکتا
(کیونکہ مثلثوں ا ب ج اور ا ب ج میں

مقام ب پر جو زاویہ بنے گا وہ ۱۸۰° - $\angle \text{ب}$ کے برابر ہوگا
اور $\angle \text{ب}$ کے برابر نہیں ہوگا) اگر $\angle \text{ب} < \angle \text{ج}$ تو معلوم ہوگا کہ
اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کر سکتا ہے
اوپر کے نتائج کا خلاصہ یہ ہے

فرض کرو کہ مثلث کے اجزاء $\angle \text{ج}$ ، $\angle \text{ب}$ معلوم ہیں

(۱) اگر $\angle \text{ب} > \angle \text{ج}$ جب ب تو اس صورت میں کوئی مثلث

شرائط سوال کو پورا نہیں کرتا۔

(۲) اگر $\text{ب} = \text{ج}$ جب ب تو ایک مثلث قائم الزاویہ شرائط سوال کو پورا کرتا ہے

(۲) اگر $\text{ب} < \text{ج}$ جب ب اور ج اور زاویہ ب حادہ ہو تو دو مثلث شرائط معلومہ کو پورا کرتے ہیں

(۳) اگر $\text{ب} < \text{ج}$ تو اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا
 مگر اگر $\text{ب} = \text{ج}$ تو شکل سوم میں نقاط ب اور ج ایک دوسرے پر مطبق ہونگے اور اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا،

(۵) اگر ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا سوائے اس صورت کے جبکہ $\text{ب} < \text{ج}$

۱۹۳۴ - صورت مشتبہ پر بحث بطریق جبر: اس طرح ہو سکتی ہے۔

شکل دفعہ ۱۹۰ سے حاصل ہوگا

$$\text{ب} = \text{ج} + \text{ا} - \text{د} - ۲ \text{ج} - ۲ \text{جم} \text{ب}$$

$$\therefore \text{ا} - \text{د} - ۲ \text{ج} - ۲ \text{جم} \text{ب} + \text{ج} = \text{جم} \text{ا} \text{ب}$$

$$= \text{ب} - \text{ج} + \text{ج} = \text{جم} \text{ا} \text{ب} = \text{ب} - \text{ج} \text{جب} \text{ا} \text{ب}$$

$$\therefore \text{ا} - \text{ج} = \text{جم} \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} \text{جب} \text{ا} \text{ب}$$

یعنی $\text{ا} = \text{ج} + \text{جم} \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} \text{جب} \text{ا} \text{ب} \dots \dots (۱)$
 سادہ (۱) سے ا کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر $\text{ب} = \text{ج}$

اور ب معلوم ہوں

(ا) اگر \angle جب ب تو مقدار ما بنا۔ \angle جب ب خیالی ہوگی اور (ا) سے وکی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہ ہوگی
(ب) اگر \angle = \angle جب ب تو وکی صرف ایک قیمت \angle جب ب ہوگی

پس اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرے گا اور وہ مثلث قائم الزاویہ ہوگا۔
(ج) اگر \angle = \angle جب ب تو وکی دو قیمتیں ہوئیں لیکن چونکہ وکا مثبت ہونا ضروری ہے اس لئے مساوات (ا) میں ہم علامت جذر کے ماقبل منفی علامت صرف اُس صورت میں لے سکتے ہیں

جبکہ \angle جم ب۔ ما بنا۔ \angle جب ب مثبت ہو
یعنی جبکہ ما بنا۔ \angle جب ب \angle جم ب

یعنی بنا۔ \angle جب ب \angle جم ب یعنی بنا۔ \angle
اس لئے معلوم ہوا کہ دو مثلث صرف اُسی صورت میں حاصل ہونگے جبکہ \angle = \angle جب ب اور ساتھ ہی \angle = \angle

(د) اگر زاویہ ب منفی ہو تو \angle جم ب منفی ہوگا اور وکی ایک قیمت ہمیشہ منفی ہوگی اور مثلث ناممکن ہوگا
دوسری قیمت صرف اُس صورت میں مثبت ہوگی
اگر \angle جم ب + ما بنا۔ \angle جب ب مثبت ہو

$$\therefore ج = ۵۸ \text{ ' } ۵۴ \text{ ' } ۵۴ \text{ یا } ۱۸۰ - ۵۸ \text{ ' } ۵۴ \text{ ' } ۵۴$$

اس لئے (شکل ۳ دفعہ ۱۹۲) سے حاصل ہوگا

$$ج = ۵۸ \text{ ' } ۵۴ \text{ ' } ۵۴ \text{ اور } ج = ۱۲۱ \text{ ' } ۳ \text{ ' } ۳$$

$$\therefore > ب ا ج = ۱۸۰ - ۱۵ \text{ ' } ۳۳ - ۵۸ \text{ ' } ۵۴ \text{ ' } ۵۴$$

$$= ۸۶ \text{ ' } ۲۸ \text{ ' } ۳$$

$$\text{اور } ب ا ج = ۱۸۰ - ۱۵ \text{ ' } ۳۳ - ۱۲۱ \text{ ' } ۳ \text{ ' } ۳$$

$$= ۲۵ \text{ ' } ۲۱ \text{ ' } ۵۴$$

امثلہ نمبری ۳۱

طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳) کے نتائج کی ترتیبی طے سے تصدیق کرنی چاہیے

۱۔ اگر $۵ = ب$ اور $۱ = ج$ اور جب $۱ = ۳$ تو معلوم کرو کہ مثلث کے حل کرنے میں مشتبہ صورت پیدا ہوگی یا نہیں۔

۲۔ اگر $۲ = ج$ اور $۱ = ۳$ اور $۱ = ۵$ تو مثلث کو حل کرو

۳۔ اگر $۱۰ = ج$ اور $۱۰۰ = ۱$ اور $۱۰۰ = ۳$ تو مثلث کو حل کرو

۴۔ اگر $۲ = ب$ اور $۳ = ۱$ اور $۳ = ۱$ تو ثابت کرو کہ تیسرے ضلع کی دو قیمتیں ہو سکتی ہیں جن میں سے ایک دوسری کی دوچند ہے

۵۔ اگر $۱ = ۳$ اور $۲ = ۸$ اور $۱ = ۶$ تو ج دریافت کرو

۶۔ معلوم ہے $ب = ۳۰$ کیج ۱۵۰ اور $ب = ۵۰$ کیج ۱۵۰

ثابت کرو کہ ان دو مثلثوں میں سے جو شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں

ایک مثلث متساوی الساقین ہے اور دوسرا مثلث قائم الزاویہ ہے

تیسرے ضلع کی بڑی قیمت دریافت کرو

اگر $b = 20$ ، $c = 150$ اور $b = 45$ تو کیا حل مشتبہ ہوگا؟

۷۔ صورت مشتبہ میں $b = 45$ اور a معلوم ہیں، ثابت کرو کہ c کی

دو قیمتوں کا تفاوت $2\sqrt{a}$ ہے۔ b جب a ہے

۸۔ اگر $b = 5$ ، $b = 3$ اور $a = 25$ تو مثلث کے باقی زاوے

دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، ل جب $33 = 29$ ، $45.20.50.4 = 95$

اور ل جب $33 = 30$ ، $45.30.99.3 = 95$

۹۔ اگر $b = 9$ ، $b = 12$ اور $a = 30$ تو c دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، لوک $3 = 27.44.12 = 95$

لوک $1.41 = 25.23.30.1$ ، لوک $3.48 = 25.56.43.5 = 95$

ل جب $a = 28$ ، $39 = 33.11.0.8$ ، ل جب $a = 28$ ، $39 = 33.11.0.8$

اور ل جب $a = 28$ ، $39 = 33.11.0.8$ ، ل جب $a = 28$ ، $39 = 33.11.0.8$

۱۰۔ معلوم کرو کہ ذیل کے مثلثوں کے حل مشتبہ ہیں یا نہیں۔

صورت مشتبہ میں تیسرے ضلع کی چھوٹی قیمت اور دونوں صورتوں میں

باقی زاوے دریافت کرو

(۱) $b = 30$ ، $c = 250$ فٹ اور $b = 45$ فٹ

(۲) $b = 30$ ، $c = 250$ فٹ اور $b = 45$ فٹ

معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، لوک $3 = 27.44.12 = 95$ ، $45.20.50.4 = 95$

ل جب $a = 28$ ، $39 = 33.11.0.8$ ، ل جب $a = 28$ ، $39 = 33.11.0.8$

اور ل جب $\hat{A} = 961489001$

۱۱۔ معلوم ہے $\hat{A} = 250$ ، $\hat{B} = 230$ اور $\hat{C} = 22$ $\hat{A} = 238$ زاوئے ب اور ج دریافت کرو اور نیز یہ بھی معلوم کرو کہ کیا ان کی ایک سے زیادہ قیمت ہو سکتی ہے؟

معلوم ہے، لوک $238 = 23949300$ ، لوک $238 = 23802112$

ل جب $\hat{A} = 969483402$ ، ل جب $\hat{B} = 5$ 969483111

اور ل جب $\hat{A} = 59$ 969404439

۱۲۔ دوسید ہی سڑکیں ایک دوسرے کو زاویہ 30° پر قطع کرتی ہیں اور ان کے مقام تقاطع سے دو مسافر A اور B ایک ہی وقت پر روانہ ہوتے ہیں، A ایک سڑک پر 5 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا ہے اور B یکساں رفتار سے دوسری سڑک پر چلتا ہے، تین گھنٹہ کے بعد ان کا باہمی فاصلہ 9 میل ہے ثابت کرو کہ اس شرط کو پورا کرنے کے لئے B کی رفتار کی دو قیمتیں ہو سکتی ہیں، انکو معلوم کرو

۱۳۔ ایک مثلث کا ایک ضلع 432 فٹ ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ 30° ہے، مثلث کا دوسرا ضلع 1015 فٹ ہے، اس کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس زاویہ کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

۱۴۔ ایک مثلث کے دو اضلاع 53425 اور 158954

فٹ ہیں اور ضلع 158954 کے مقابل کا زاویہ 95° ہے، مثلث یا مثلثوں کے باقی زاوئے دریافت کرو

۱۵۔ معلوم ہے $\hat{A} = 90$ ، $\hat{B} = 230$ اور $\hat{C} = 22$ 969404439

ج کی چھوٹی قیمت دریافت کرو۔

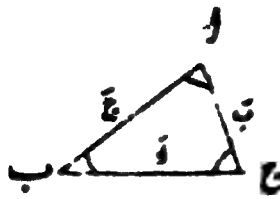
۱۹۱- صورت چہارم- ایک ضلع اور دو زاوے یعنی $\angle A$

ب' اور ج معلوم ہیں

تکہ ایک مثلث کے تین زاوے دو کائنوں کے برابر ہوتے

یہ اس لئے یکساں زاویہ معلوم

ہو سکتا ہے،



ملاع ب' اور ج ارتباطات

یہ سے حاصل ہو سکتے ہیں

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

ہے سے $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ اور $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

۱۹۱- صورت پنجم- تینوں زاوے 'ا' 'ب' 'ج' معلوم ہیں

ن صورت میں صرف اضلاع کی نسبتیں ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ملاع کی مطلق قیمتیں اس صورت میں معلوم نہیں ہو سکتیں

امثلہ نمبری ۳۲

- اگر $a = 10$ اور $\angle A = 30^\circ$ تو $\angle B = 45^\circ$ کی نسبتیں دریافت کرو

- ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں $1:2:4$ ہیں ثابت کرو

دسب سے بڑے ضلع کی نسبت سب سے چوٹے ضلع کے ساتھ
 $۵۶ + ۱۱ = ۵۶۱ - ۱$ ہے۔

۳۔ اگر $۱ = ۲۵$ ، ب = ۲۵ اور ج = ۹۰ تو ثابت کرو کہ

$$۱ + ج = ۲۶ = ۲۵ + ۱$$

۴۔ ایک مثلث کے دو زاوے بالترتیب ۱۳۱° ، ۱۳۱° اور
 ۱۹° ، ۱۹° ہیں اور پہلے زاویہ کے مقابل کا ضلع ۵۵ ہے، دوسرے
 زاوے کے مقابل جو ضلع ہو اُس کا طول دریافت کرو، معلوم ہے

$$لوک ۵۵ = ۱۵۷۴۰۰۳۶۲۷۷ = ۱۵۷۴۰۰۳۶۲۷۷$$

$$لوک جب ۱۳۱ = ۱۳۱ = ۱۳۱$$

$$لوک جب ۱۹ = ۱۹ = ۱۹$$

۵۔ دو جہازوں کے درمیان فاصلہ ایک میل ہے اور ہر ایک جہاز
 سے اُس زاویہ کا مشاہدہ کیا گیا ہے جو دوسرے جہاز اور کنارہ پر کے
 ایک مینارہ روشنی کے درمیانی فاصلے کے محاذی اول الذکر جہاز
 پر منتہا ہے اور یہ زاوے بالترتیب ۱۵° ، ۱۵° اور ۱۵° ہیں، معلوم ہے

$$لوک جب ۱۵ = ۱۵ = ۱۵$$

$$لوک جب ۱۵ = ۱۵ = ۱۵$$

$$لوک ۱۵ = ۱۵ = ۱۵$$

ہر ایک جہاز سے روشنی کا فاصلہ دریافت کرو

۶۔ ایک مثلث میں قاعدے کے متصل زاوے ۱۱۲° اور ۱۱۲°

ہیں، ثابت کرو کہ قاعدہ ارتفاع کا دو چند ہے۔

ذیل کی پانچ مثالوں کے لئے نوکار تھی جدولوں کی ضرورت ہوگی
 ۷۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۷ فٹ ہے اور قاعدے کے متصل
 زائے 129 اور 13 اور 38 اور 39 ہیں، چھوٹے ضلع کا طول دریافت کرو
 ۸۔ اگر ایک مثلث کے زادیوں کی باہمی نسبتیں $5:10:21$ ہوں
 اور چھوٹے زائے کے مقابل کا ضلع 3 فٹ ہو تو باقی اضلاع دریافت
 کرو۔

۹۔ ایک مثلث کے زائے 150 ، 18 اور 20 اور 11 ہیں اور
 سب سے بڑا ضلع 1000 فٹ ہے، سب سے چھوٹا ضلع دریافت کرو
 ۱۰۔ نقطہ ب سے نقطہ ا کا فاصلہ دریافت کرنے کے لئے خط
 ب ج اور زوایا \angle ب ج اور ب ج \angle کو ناپا گیا ہے اور ان کی
 پیمائشیں بالترتیب 28 گز اور 55 اور 32 اور 10 اور 15 اور 20 ہیں، فاصلہ
 ا ب دریافت کرو۔

۱۱۔ فاصلہ ا ب معلوم کرنے کی غرض سے \angle ب مساوی 100 اگر
 کسی مناسب سمت میں ناپا گیا ہے، نقطہ ا اور ب پر کے زائے
 \angle ا ب اور \angle ب ا بالترتیب 18 اور 14 اور 38 مشاہدہ کئے
 گئے ہیں، فاصلہ ا ب کو قریب ترین گز تک دریافت کرو

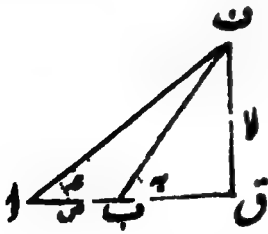


باب چہارم

بلندیاں اور فاصلے

۱۹۷۔ اس باب میں ہم خاص قسم کے عملی مسائل پر غور کریں گے جو بالعموم ارضی پیمائشوں میں استعمال ہوتے ہیں اس قسم کے سادہ سوالات کا ذکر باب سوم میں آچکا ہے

۱۹۸۔ مختلف مقامات پر زاویوں کا مشاہدہ کرنے سے ایک ایسے برج کی بلندی دریافت کرو جس تک ہم نہیں پہنچ سکتے۔



فرض کرو کہ 'ن' ق برج ہے اور پائین برج 'ق' میں سے جو زمین گزرتی ہے وہ متوازی لائن ہے۔

اس زمین کے نقطہ 'ا' پر برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع عہ ناپو مقام 'ا' سے پائین برج کی سیدھ میں فاصلہ 'ا' ب (= ص) ناپو

مقام ب پر زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کرو۔
 ب برج کی بلندی لا مطلوب ہے، اس کو فاصلہ ص سے
 ن طرح منسلک کرو۔
 مثلث ب ق سے

$$\frac{\text{ب}}{\text{ق}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ق}} \dots\dots\dots (۱)$$

مثلث ب ق سے

$$\frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ق}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (بہ - عم)}} \dots\dots\dots (۲)$$

نکدے ب ق ا = ح ق ب ن - ح ق ا ن = بہ - عم
 (۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

$$\frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (بہ - عم)}}$$

$$\text{بہ} = \frac{\text{ص}}{\text{جب ب}} \times \text{جب (بہ - عم)}$$

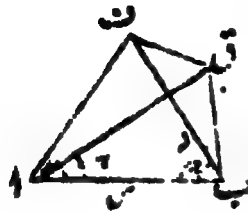
ب سے بلندی لا حاصل ہوتی ہے اور اس ضابطہ کی صورت
 وکار تہی حسابات کے لئے نہایت موزوں ہے۔
عدوی مثال۔ اگر ص = ۱۰۰ فٹ ماعہ = ۳۰ اور
 = ۶۰ تو

$$۱۰۰ = \frac{\text{جب ب} \times \text{جب (بہ - عم)}}{\text{جب ب}} \times ۱۰۰ = \frac{۳۰}{۶۰} \times ۱۰۰ = ۵۰ \text{ فٹ}$$

۱۹۴۔ اگر فاصلہ ب ق کو ق کی سیدھ میں تاپنا آسان

یک ہی سطح میں واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ق اور ق دو مقام ہیں جن کا باہمی فاصلہ ق ق مطلوب ہے۔



فرض کرو کہ مقامات و اور ب

کا فاصلہ (ص) دیا ہوا ہے

مقام و پر زاوے ق ق و ا ب

ورق و ب تا پو اور ان کو

الترتیب عہ اور ب سے تعبیر کرو۔

نیز مقام ب پر زاوے ق ق و ب و ا اور ق ق ب و تا پو

اور انکو بالترتیب جہ اور لہ سے تعبیر کرو۔

اب چونکہ مثلث ق و ا ب میں ایک ضلع ص اور

دو متصل زاوے عہ اور جہ معلوم ہیں اس لئے بموجب

دفعہ ۱۶۹، ق و ا ب کے ربط سے حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{ق و ا}{ص} = \frac{جب ج}{جب (عہ + جہ)} \dots (۱)$$

اسی طرح سے مثلث ق و ا ب میں

$$\frac{ق و ا}{ص} = \frac{جب لہ}{جب (بہ + لہ)} \dots (۲)$$

اب ہمیں مثلث ق ق و ا کے اضلاع ق ق اور ق و ا

نیز انکا درمیانی زاویہ ق ق و ا (عہ - بہ) معلوم ہو گیا۔

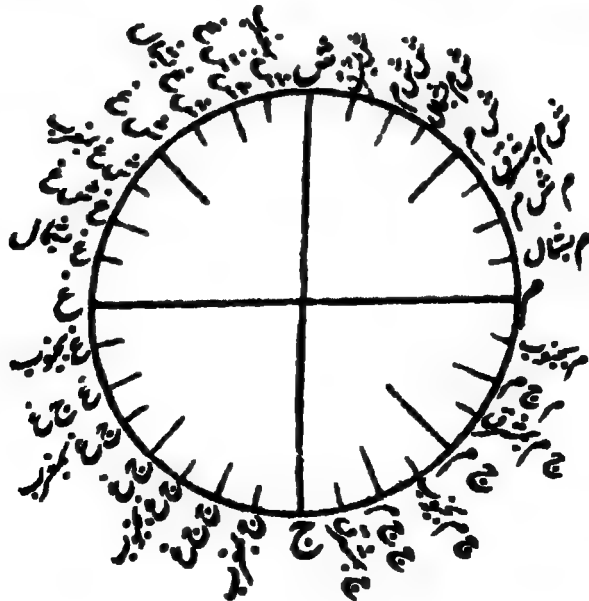
اس لئے ہم ضلع ق ق کو ترکیب دفعہ ۸۷ سے

معلوم کر رہے ہیں۔

اگر چاروں مقامات (ناب، فاق، ایک ہی سطح میں نہ ہوں تو ہمیں زاویہ فاق بھی ناب لینا چاہیے کیونکہ اس صورت میں فاق زاویہ ۹۰° کے برابر نہیں ہے، باقی سب طرح سے حل مندرجہ بالا حل کے مطابق ہوگا۔

۲۰۱۔ بحری قطب نما کے نقاط و جہات

اگر نقطہ معینہ و پر کھڑے ہو کر ایک اور نقطہ معلوم کی طرف دیکھیں تو جس سمت میں نقطہ ب نقطہ سے نظر آئے اس کو بلحاظ نقطہ و کے نقطہ ب کی جہت کہتے ہیں مثلاً اگر وب اسات شمال اور



مشرق — درمیانی زاویہ کی تنصیف کر کے تو
 با کی جہت یا سمت کو ہم ”شمال-مشرق“ کہیں گے۔
 اگر یہ کہا جائے کہ ایک خط کی جہت یا سمت شمال سے
 ۲۰ مغرب کو ہے تو اس کا یہ مطلب ہو گا کہ یہ سمت
 شمال سے زاویہ ۲۰ بناتی ہے اور یہ زاویہ شمال کی
 جانب سے مغرب کی طرف کو تا پا گیا ہے۔

اس فرض سے کہ ایک نقطہ کی جہت یا سمت قائم
 ہو سکے یا بیان ہو سکے بحری قطب نام کے کارڈ کو
 ۳۲ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ملاحظہ ہو شکل ۱۱۰
 ان حصوں میں مختلف نشان لگے ہوئے ہیں۔ فرض کرو
 کہ فی الحال زیر بحث صرف وہی ربع ہے جو شمال اور
 مشرق کے درمیان واقع ہے۔ ش اور م کی درمیانی
 قوس کے نقطہ وسط پر نشان ش م یعنی ”شمال-مشرق“
 بنا ہوا ہے۔

نیز ش م اور ش اور م کے درمیان جو قوسیں ہیں
 ان کے انصیفوں پر بالترتیب ”شمال-شمال-مشرق“ اور
 ”مشرق-شمال-مشرق“ (یعنی ش ش ش م اور م ش م)
 لکھا ہوا ہے۔

اگر شمال کی طرف سے شمار کیا جائے تو باقی چھوٹے
 چار حصوں کو شمال بمشرق، ش م شمال، ش م بمشرق
 اور مشرق شمال کہتے ہیں اسی طرح سے قطب کا

باقی تین حصے بھی منقسم ہو سکتے ہیں۔
 تھام ہے کہ کارڈ کے دو چھوڑجوں کی درمیانی قوس کے کھانسی
 مرکز و پر زاویہ $\frac{360}{4}$ یعنی 90° بنتا ہے۔

اشکالہ نمبری ۳۳

۱۔ ایک محل برج کے وسط میں ایک علم قائم ہے، ایک
 شخص کو جو برج کے ایک رخ کے وسط کے مقابل زمین پر چلتا ہے
 علم کی چوٹی عین سوٹ کے فاصلے سے دکھائی دینی شروع
 ہوتی ہے، ۱۰۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہ برج کی چوٹی اور علم کی چوٹی کے
 ارتفاعی زاویوں کو مشاہدہ کرتا ہے، ان زاویوں کے کاس
 بالترتیب $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں، برج کی بلندی اور عرض نیز علم کی
 بلندی دریافت کرو، زمین ستوازی الافق ہے۔

۲۔ سطح ہموار پر ایک شخص ایک برج کی سیدھ میں
 جاتا ہے اور ایک خاص مقام پر برج کا زاویہ ارتفاع 10°
 مشاہدہ کرتا ہے، برج کی سمت میں ۵۰ گز جانے کے بعد
 وہی زاویہ ارتفاع 15° دکھائی دیتا ہے، اگر معلوم ہو

ل جب $15^\circ = 99.62$ ۱۲۴۱۲۹۹۶۲ ل جم $5^\circ = 99.62$ ۸۳۲۲۲۲۲۲

لوک 25.68 ۳۳۳۳۳۳۳۳ اور لوک 25.68 ۵۰۳۳۳۳۳۳۳۳

تو برج کی بلندی گزوں میں ۳۳ مرتبہ کے اعشاریہ تک
 دریافت کرو۔

۳۔ ایک برج دے سطح افقی پر کھڑا ہے اور اسی

سطح میں ایک خط (ب ج د واقع ہے ۔ نیچے کی بلندی کے معاذی ۱ پر زاویہ طہ ، ب پر زاویہ طہ اور ج پر زاویہ ۳ طہ بنتا ہے اگر اب اور ب ج بالترتیب ۵۰ اور ۲۰ فٹ ہوں تو برج کی بلندی اور فاصلہ ج د معلوم کرو۔

۴۔ ایک ۵۰ فٹ اونچا برج ایک ٹیلے کی چوٹی پر واقع ہے ، سطح زمین پر کے کسی نقطہ سے برج کے پائین اور اس کے ارتفاعی زاوے بالترتیب ۵۰° اور ۴۵° ماپے گئے ہیں ، ٹیلے کی بلندی دریافت کرو۔

۵۔ ایک عمودی لاٹھ ۱۰۰ فٹ سے زیادہ اونچی ہے اور اس کے دو حصے ہیں ، نچلا حصہ کل طول کا $\frac{1}{4}$ ہے ، لاٹھ کی جڑ میں سے جو سطح آتقی گذرتی ہے اس پر ایک نقطہ لاٹھ سے ۲۰ فٹ کے فاصلے پر لیا گیا ہے اور اوپر کے حصے کے معاذی اس نقطہ پر جو زاویہ بنتا ہے اس کا ماس $\frac{1}{4}$ ہے ، لاٹھ کی بلندی دریافت کرو۔

۶۔ ایک برج کے معاذی ایک نقطہ پر جو پائین برج میں سے گذر نیوالی سطح آتقی پر واقع ہے زاویہ ۴۵° بنتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر جو پہلے نقطہ سے ح فٹ اونچا ہے پائین برج کا زاویہ انحناس یہ مشاہدہ کیا گیا ہے ، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۷۔ سطح سمندر کے کنارے ہوا زمین کے کسی مقام سے ایک شخص غبارہ کے ذریعہ سمت ماس میں اوپر جڑا اور

اس نے سمندر میں ایک ساکن جہاز کا زاویہ نشیب ۳۰ مثلاً
کیا، پھر ۶۰۰ فٹ عمودی سمت میں نیچے اترنے کے بعد اُس نے
دیکھا کہ زاویہ نشیب ۱۵ ہے، نقطہ صعود سے جہاز کا آفتی
فاصلہ دریافت کرو۔

۸۔ سطح ہموار پر ایک برج فاق کا پائین ق ہے، اُسی
سطح آفتی میں دو اور نقاط اور ب ایسے ہیں کہ \angle ق ا ب = ۹۰
اور ا ب = ۴۰ فٹ، نیز یہ معلوم ہے کہ
مم فاق = ۳۰ اور مم فاق = ۲۰
برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک مینار کسی شخص کے م ج م کی طرف واقع ہے،
اور دو پہر کے وقت اس کے سایہ کا سرا ایک شخص کے
شمال-مشرق کی طرف ہوتا ہے، اگر سایہ ۱۰ فٹ لمبا ہو
اور نقطہ نظر سے مینار کا ارتفاع ۵۴ ہو تو مینار کی بلندی
دریافت کرو۔

۱۰۔ دو مقامات اور ب سے ایک برج کا مشاہدہ کرنے پر
معلوم ہوا کہ یہ ا کے شمال کی طرف اور ب کے شمال-مغرب
کی طرف واقع ہے، ب مقام ا سے ۱۰۰ فٹ کے
فاصلے پر مشرق کی طرف کو ہے، اگر مقام ا سے
برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا جائے تو یہ زاویہ اُس زاویہ ارتفاع
کے ہتھم کے برابر ہوتا ہے جو مقام ب سے مشاہدہ کیا گیا
ہو، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک مینار کا ارتفاع ایک ایسے مقام سے جو اس کے جنوب کی طرف واقع ہے ۴۵' ہے اور ایک دوسرے مقام سے جو مقام اول الذکر کے مغرب کی طرف واقع ہے ۵۰' ہے اگر ان دو مقامات کے درمیان فاصلہ ۱ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{بندی} = \frac{1(1-37)}{37^2} \text{ ہے۔}$$

۱۲۔ ایک گرجے کے برج کا قاعدہ شکل میں منع ہے، ایک شخص اس کے قطر محدودہ پر ۱۲ فٹ کے فاصلے پر کھڑا ہو کر برج کی چوٹی کے دو سیرینی کونوں میں سے ہر ایک کے زاویہ ارتفاع کو ۳۰' مشاہدہ کرتا ہے، نیز سب سے نزدیک کونے کا ارتفاع ۴۵' ہے، ثابت کرو کہ برج کا عرض ۱ (۲۶-۲۶) فٹ ہے۔

۱۳۔ ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور ایک شخص اس کے جنوب کی طرف مقام ۱ پر کھڑا ہو کر اس کا زاویہ ارتفاع ۶۰' مشاہدہ کرتا ہے، پھر وہ ۱ کے مغرب کی طرف مقام ب پر جاتا ہے اور اس جگہ زاویہ ارتفاع ۴۵' پاتا ہے، اس کے بعد ۱ ب محدودہ میں ایک مقام ج پر زاویہ ارتفاع ۳۰' ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مقام ب مقامات ۱ اور ج کے عین وسط میں واقع ہے۔

۱۴۔ ایک افقی قاعدہ کا طول ۱۲ ہے اور اس کے دو کناروں سے ایک چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۶۰' مشاہدہ کیا گیا ہے

اس کے وسط سے یہی زاویہ فہ دکھائی دیتا ہے ثابت
 کہ چوٹی کی بلندی $\frac{\text{جب طہ جب فہ}}{\text{جب (فہ + طہ) جب (فہ - طہ)}}$ ہے

— دو مقامات ۱ اور ۲ کے درمیان فاصلہ ... افٹ ہے
 سطح افقی میں جس میں ۱ ب واقع ہے ف اور ق
 ۱ ب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں ، زاوے
 ۱ ب ، ف ب ، ۱ ق ، ۱ ب ، ق ب ۱ بالترتیب
 ۳۰ ، ۴۵ ، ۶۰ ہیں ، معلوم کرو کہ ف مقام ق
 سے کتنی دور ہے اور انہیں سے ہر ایک ۱ اور ۲ سے
 دور ہے ۔

مثلاً ذیل کے حل کرنے میں نوکارتی جداول کی ضرورت ہوگی
 — سطح افقی کے ایک نقطہ پر کسی پہاڑ کی چوٹی کا
 تفاع ۱۲۵ اے ہے اور سطح کے ایک اور نقطہ پر جو کہ
 ۱ اور نقطہ اول کو ملانے والے خط راست میں نقطہ
 ل سے ایک میل کے فاصلے پر واقع ہے چوٹی کا
 تفاع ۱۲۰ اے ہے ، پہاڑ کی بلندی دریافت کرو ۔

— ایک پہاڑ کی چوٹی سے دو مسلسل میل کے پتھروں
 ، انخفاضی زاوے ۵ اور ۱۵ مشاہدہ کئے گئے ہیں ،
 سطح سمواہ زمین پر ایک ایسی سطح عمودی میں واقع ہیں
 نقطہ نظر میں سے گزرتی ہے ، پہاڑ کی بلندی اور نزدیک

۱۸ — سطح افقی پر ایک قلعہ اور مقبرہ ہے، قلعہ کی بلندی ۴۴ فٹ ہے اور اسکی چوٹی سے مقبرہ کی چوٹی اور پائین کے انخاضی زاوے ۴۰° اور ۸۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، مقبرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۹ — ایک علم ع ن ہموار زمین پر قائم ہے، ایک قاعدہ اب خط ان کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط (۱) ب، (۲) ن ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں اور زاوے ع ان اور ع ب ن بالترتیب ۷۵° اور ۲۰° ہیں، ثابت کرو کہ علم کی بلندی اب جب ع جب ہے

جب (ع) — جب (ب) جب (ع) — جب (ب) جب (ع) — جب (ب)

اگر اب = ۱۰۰ فٹ، ع = ۲۰° اور ب = ۵۰° تو بلندی دریافت کرو۔

۲۰ — ایک شخص نے ایک برج کے ٹھیک جنوب میں اس سطح افقی پر کھڑے ہو کر جو پائین برج میں سے گذرتی ہے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۴° ۱۶ دیکھا، اگر مشرق کی طرف جانے پر اس نے ارتفاع ۵۰° پایا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۱ — ایک شخص نے غبارہ میں بیٹھ کر زمین پر ایک چیز کا زاویہ انخاض ۳۳° دیکھا، وہ چیز اس وقت اس کے ٹھیک جانب شمال میں تھی، اس کے بعد ہوا غبارہ کو ۳ میل مغرب کی طرف لی گئی اب زاویہ انخاض ۲۱° تھا، غبارہ کی بلندی دریافت کرو۔

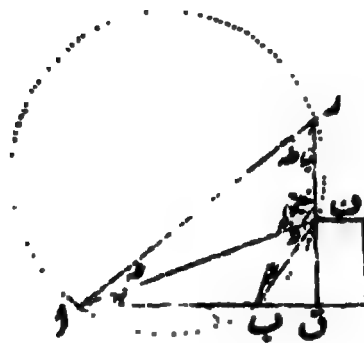
۲۲ — ایک بنیادی خط اب (= ۱۰۰ فٹ) کے دونوں

سروں سے پائیں برج ج کی جہات مشاہدہ کی گئیں اور معلوم ہوا کہ \angle ج ا ب $= 64^\circ 23'$ اور \angle ج ب ا $= 47^\circ 15'$ اور مقام ا سے برج کا ارتفاع $9^\circ 25'$ دیکھا گیا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۰۲۔ مثال ا۔ سطح افقی پر ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک جھنڈا ہے۔ جھنڈے اور برج کے محاذی سطح افقی کے ایک مقام پر زاوئے عمود بنتے ہیں، ایک شخص ان کو ناپتا ہے اس کے بعد وہ برج کے پائیں کی طرف ایک معلوم فاصلہ ا چل کر دیکھتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی نئے مقام پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی اور جھنڈے کا طول بالترتیب

$\frac{\text{ا جب ب جم (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}}$ اور $\frac{\text{ا جب عہ}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}}$ ہیں
فرض کرو کہ ف چوٹی اور ق پائیں برج ہے۔ نیز ف ر جھنڈا ہے۔ فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر زاوئے ناپے گئے ہیں یعنی \angle ف ا ق $=$ بہ اور \angle ف ا ر $=$ ب ر $=$ عہ، چونکہ یہ دو آخری زاوئے برابر ہیں اس لئے ان چار نقاط ا ب ر ق میں سے ایک دائرہ گزریگا۔
جھنڈے کی بلندی دریافت کرنے کے لئے ہمیں نامعلوم

طول فن ر اور معلوم طول لب کا باہمی تعلق دریافت کرنا چاہیے۔ اس غرض سے ہکو چاہیے کہ ان میں سے ہر ایک طول کو اور کے ساتھ ایک ربط کے ذریعہ منسلک کر دیں۔



سب سے اول مثلث اور فن اور لب کے زاویوں کی تحقیق کرنی چاہیے۔

چونکہ نقاط و، ب، ن، ر ایک دائرہ پر واقع ہیں

اس لئے $\angle ب ر ن = \angle ب ا ن = ب$

اور $\angle ا ن ب = \angle ا ر ب = ط$ (دفعہ کرو)

نیز $\angle ا ن ر = ۹۰ + \angle ا ن ق = ۹۰ + ب$

اب چونکہ مثلث ا ن ر کے زاوے ملکر دو قائموں کے برابر ہیں اس لئے

$$۱۸۰ = ع + (۹۰ + ب) + ط + ب$$

یعنی $ط = ۹۰ - (ع + ۲ب) \dots\dots\dots (۱)$

مثلث ا ن ر اور لب ر سے

برابر زاوے بنتے ہیں ، جھنڈے کی بلندی دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ \angle نقطہ نگاہ ہے اور زاویوں \angle اور \angle
 ہر ایک طہ کے برابر ہے۔ نیز فرض کرو کہ بلندی \angle رہے۔
 \angle مس طہ = \angle اور مس طہ = \angle

$$\frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle}$$

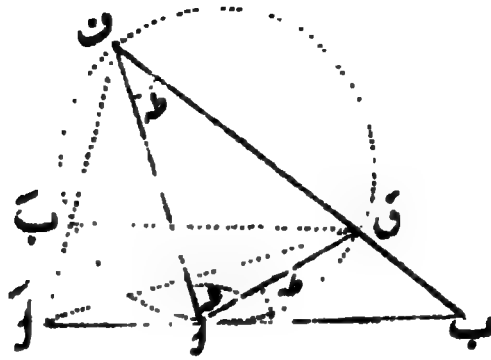
$$\angle = \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} = \angle - \angle$$

ور ب کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو مآسانی حاصل
 ہوتا ہے۔

۲۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جاتا تھا اس نے
 کے ایک مقام پر دیکھا کہ دو اشیاء کے محاذی
 سے بڑا زاویہ بنتا ہے اور اس مقام سے سڑک
 ص آگے چلکر اس نے دیکھا کہ دونوں اشیاء ایک
 خط مستقیم میں واقع ہیں جو سڑک سے زاویہ نہ بنتا ہے
 نہ کرو کہ اشیاء کے درمیان فاصلہ

ص جب عہ جب بہ قہ عہ + عہ قہ عہ ہے
 کرو کہ \angle اور \angle دو نقطے ہیں اور خط \angle قہ سڑک
 خط ب پر ملتا ہے اگر نقطہ \angle پر بڑے سے بڑا زاویہ
 تو لازماً نقاط \angle اور \angle میں سے گزرنیوالا دائرہ

سٹر کو نقطہ او پر مس کریگا۔



[کیونکہ فرض کرو کہ اب پر کوئی اور نقطہ ہے، اسکوٹ سے ملاؤ اور فرض کرو کہ اوٹ دائرہ کو نقطہ ب پر قطع کرتا ہے۔

تب زاویہ ن او ق > زاویہ ن ب ق (اقلیدس م ۱۷ ش ۱۶)
اور اس لئے > زاویہ ن ا ق (اقلیدس م ۱۷ ش ۱۶)
فرض کرو کہ زاویہ ق اب = ط تب
بوجب اقلیدس م ۳ ش ۳۲ زاویہ ا ق ب بھی ط کے برابر ہے
اس لئے ۹۰ = مثلث ن اب کے زاویوں کا مجموعہ

$$= ط + (ط + ط) + ب$$

$$یعنی ط = ۹۰ - \frac{ط + ط}{۲}$$

مثلثات ن ا ق اور ق اب سے

$$\frac{ن ق}{ا ق} = \frac{جب ط}{جب ا ق} \text{ اور } \frac{ن ق}{ا ق} = \frac{جب ب}{جب ا ق} = \frac{جب (ط + ط)}{جب (ط + ط)}$$

اس لئے عمل ضرب سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب طہ جب (طہ + عہ)}} = \frac{\text{نق}}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جم عہ + بہ جم عہ - عہ}} =$$

$$\therefore \text{نق} = \text{ص جب عہ جب بہ قط عہ + بہ قط عہ - عہ}$$

امثلہ نمبری ۳۴

۱۔ ایک پل ۶ ستونوں پر قائم ہے جو ایک دوسرے سے برابر برابر فاصلوں پر ہیں اور دو مسلسل ستونوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے، ایک کشتی ایک درمیان ستون کی سیدھی لنگر لائن کھڑی ہے اور پل کی تمام لمبائی کے محاذی کشتی پر زاویہ قائم بناتا ہے ثابت کرو کہ کشتی کا فاصلہ پل سے ۱۰۰ فٹ ہے۔

۲۔ ایک سیڑھی بازار کے ایک طرف ۲۵ فٹ اونچی گھر کی نچلے پتھر تک پہنچتی ہے اور زمین سے زاویہ ۷۵° کا بناتا ہے، سیڑھی کے نچلے سرے کو قائم رکھ کر اس کو اسطرح پھرایا گیا ہے کہ وہ بازار کی دوسری طرف دیوار کے ساتھ جا لگتی ہے اس حالت میں سیڑھی کا زاویہ زمین کے ساتھ ۱۵° ہوتا ہے، ثابت کرو کہ بازار کی چوڑائی اور سیڑھی کی لمبائی بالترتیب ۲۵ (۳-۲) اور ۲۵ (۴-۳) فٹ ہے۔

۳۔ بازار کی ایک طرف ایک گھر سے مقابل کے گھر کی

اونچائی کے محاذی جو زاوے بنتے ہیں انکا مشاہدہ کیا گیا ہے۔
 زمین پر اونچائی کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اُس کا ۳۰ -
 اور دو کھڑکیوں پر جو ایک دوسرے کے اوپر واقع ہیں اونچائی کے محاذی جو زاوے بنتے ہیں ان میں سے ہر ایک کا ۳۰ -
 ۳۰ ہے، اگر مقابیل کے گھر کی بلندی ۶۰ فٹ ہو تو سطح ا
 سے دونوں کھڑکیوں کی بلندیاں دریافت کرو۔

۴۔ ایک سلاح کا طول معلوم ہے اور اُس کا ایک سرساز
 پر ثابت کر دیا گیا ہے، اگر وہ سوچ میں سے گذر نیوالی
 عمودی میں بلا تکلف حرکت کر سکے تو بڑے سے بڑے سایہ
 طول جو سلاح زمین پر ڈال سکتی ہے دریافت کرو۔

اگر بڑے سے بڑا سایہ سلاح کے طول کا $\frac{1}{3}$ گنا ہو تو سوچ
 ارتفاع دریافت کرو۔

۵۔ جہاز ۱ پر ایک شخص ایک اور جہاز ب کو بندرگاہ
 سے باہر آتا ہو دیکھتا ہے اس وقت بندرگاہ کی جہت شمال
 مغرب ہے۔ دس منٹ تک ۱ ایک میل شمال مشرق کا
 طرف جاتا ہے اور اُس وقت اس کے مقام سے جہاز ب
 ٹھیک مغرب کی طرف دکھائی دیتا ہے اور بندرگاہ کی سمت
 اُس وقت شمال سے ۶۰ کا زاویہ مغرب کی طرف کو بناتی۔
 اور دس منٹ کے بعد ب کی سمت جنوب مغرب ہوتی۔
 ۱ اور ب کا درمیانی فاصلہ اول مشاہدہ کیوقت دریافت کر
 نیز ب کی سمت اور رفتار معلوم کرو۔

۶۔ ایک جہاز شمال کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک شخص نے ٹھیک اپنے مغرب کی طرف ایک سیدھی دو روشنی گھر دیکھے جن کا درمیانی فاصلہ ۶ میل تھا۔ ایک گھنٹہ کے بعد ایک روشنی گھر کی سمت جنوب۔ مغرب تھی اور دوسرے کی جنوب۔ جنوب مغرب جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۷۔ تختہ جہاز پر ایک شخص نے ایک روشنی گھر کو اپنے ٹھیک شمال مغرب کی طرف دیکھا، اس کے بعد جہاز ۱۲ میل ایسی سمت میں چلا جو سمت مغرب سے جنوب کی طرف کو ۱۵° کا زاویہ بناتی تھی۔ اُس وقت روشنی گھر کی سمت شمال تھی، ہر ایک مقام پر جہاز کا فاصلہ روشنی گھر سے دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر مغرب کی طرف جا رہا تھا اس نے دیکھا کہ جب وہ ایک پون پکی کے ٹھیک جنوب میں ہو تو جو خط مستقیم اس کے مقام کو ایک دور کے برج کے ساتھ وصل کرتا ہے وہ سڑک سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے، ایک میل آگے چل کر پون پکی اور برج کی اسات اس نے بالترتیب شمال مشرق اور شمال مغرب دیکھیں، برج کے فاصلے پون پکی سے اور سڑک کے قریب ترین نقطہ سے دریافت کرو۔

۹۔ اونچی زمین پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے ایک جہاز کو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا۔ ایک چوتھائی گھنٹہ کے بعد جہاز کی سمت ٹھیک مشرق تھی، اور آدھ گھنٹہ گزر چکے بعد جہاز کی سمت جنوب مشرق ہو گئی۔ اگر یہ فرض کریا جائے کہ

جہاز یکسان رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو جہاز کی سمتِ طریق اور نصف النہار کے درمیان جو زاویہ بنے اُس کو دریافت کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو جہاز کو اول مشاہدہ کے مقام سے اُس مقام تک طے کرنے میں صرف ہوا جب وہ مشاہدہ کرنے والے کے نہایت ہی قریب تھا۔

۱۰۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جا رہا تھا جو سمت شمال سے مشرق کی طرف کو ۳۰ کا زاویہ بناتی تھی، اس نے ایک مقام پر دیکھا کہ وہ ایک گھر کے ٹھیک جنوب کی طرف ہے ایک میل آگے جانے پر اُس نے مشاہدہ کیا کہ گھر اس کے ٹھیک مغرب کی طرف ہے اور سڑک کے مقابل کی جانب میں اس وقت ایک پونچھی اس کو ٹھیک اپنے شمال مشرق کی طرف دکھائی دی۔ تین میل آگے چلکر اُس نے دیکھا کہ وہ چکی کے ٹھیک شمال کی طرف ہے ثابت کرو کہ چکی اور گھر کا خط وصل سڑک کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس $۲۵-۳۱$ ہے۔

۱۱۔ ایک سیدھی سڑک پر تین مسلسل پتھروں (A, B, C) سے ایک دور کا مینارہ دکھائی دیتا ہے، مینارہ کی سمت A پر شمال مشرق اور B پر ٹھیک مشرق ہے اور C پر سمت جنوب سے مشرق کی طرف کو ۶۰ کا زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک سے مینارہ کا کم سے کم فاصلہ $۳۱+۵$ میل ہے۔

۱۲۔ ایک برج شمال کی طرف جھکا ہوا ہے اور پائیں برج سے A اور B فٹ کے فاصلوں پر دو مقامات برج کے عین جنوب میں

۱۔ میں اگر ان مقامات سے برج کی چوٹی کے ارتقائی زاویے عم
 بہ ہوں تو ثابت کرو کہ برج کا میلان افق سے $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ ہے۔
 ۱۔ سطح ہموار کے ایک نقطہ ۱ پر ایک غبارہ کا زاویہ ارتقاع
 دکھائی دیا، غبارہ اس وقت ۱ کے ٹھیک جنوب کی طرف تھا۔
 ۲۔ ب سے جو ۱ کے جنوب میں فاصلہ جج پر واقع ہے غبارہ کا
 یہ ارتقاع شمال کی طرف بہ مشاہدہ ہوا، نقطہ ۱ سے غبارہ
 اصل، نیز غبارہ کی بلندی زمین سے دریافت کرو۔

۱۔ ایک ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے اور اس کے
 ذی ستون سے ۹ اور ۱۱ گز کے فاصلوں پر ایک ہی زاویہ
 بنتا ہے، اگر مس عم = ۱۱۔ تو ستون اور بت کی بلندیاں
 یافت کرو۔

۱۔ ایک برج کی چوٹی پر ایک علم قائم ہے، سطح مستوی
 قاعدہ برج کے مرکز میں سے ایک خط گذرتا ہے اس پر دو
 بنے نقاط ہیں جکا باہمی فاصلہ ۱۲ ہے اور جن میں سے ہر ایک
 علم کے محاذی زاویہ عم بنتا ہے، اگر ان نقطوں کو ملائیو
 کے نقطہ تنصیف پر علم کے محاذی زاویہ بہ بنے تو ثابت
 کرو کہ علم کی بلندی

$$1 \text{ جب عم } \left| \frac{2 \text{ جب یہ}}{\text{جم عم جب (پہ - عم)}} \right| \text{ ہے}$$

۱۔ کسی ٹیلے پر ایک ستون ہے، ستون سے ۱ فٹ کے
 صلے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے دیکھا کہ اس کی آنکھ پر

جو زاویہ ستون کے عاذی بتا ہے اس کا ماس ۱۲ ہے، ستون کی سیدھ میں فاصلہ ۱۲ فٹ جانے پر اس نے دیکھا کہ ستون کے عاذی اس کی آنکھ پر وہی زاویہ بتاتا ہے جو پہلے تھا۔ ٹیلے اور ستون کی بلندیاں دریافت کرو۔ اس مثال میں ہم مشاہدہ کرچو گے کی آنکھ کو ٹیلے کے قاعدہ میں سے گذر نیوالی سطح مستوی پر منطبق خیال کرتے ہیں۔

۱۷۔ ایک دریا کا عرض ۱۵۰ فٹ ہے، اس کے کنارہ پر ایک گرجے کا برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک مینارہ ہے جسکی بلندی ۳۰ فٹ ہے، دریا کے دوسرے کنارہ پر ایک شخص نے دیکھا کہ اگر ایک ۶ فٹ اونچی لکڑی پائیں برج میں سے گذر نیوالی سطح مستوی پر برج کے قریب سیدھی کھڑی کی جائے تو اس لکڑی اور مینارہ دونوں کے عاذی اس کی آنکھ پر ایک ہی زاویہ بتاتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی تقریباً ۲۸۵ فٹ ہے۔

۱۸۔ ایک شخص ایک برج کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے، اس نے پائیں برج میں سے گذر نیوالی سطح مستوی کے ایک مقام پر کھڑے ہو کر چوٹی کا ارتقاع ۳۰ دیکھا۔ کسی خاص سمت میں ایک فاصلہ ۱ جانے پر اس نے دیکھا کہ چوٹی کا ارتقاع وہی ہے جو پہلے تھا اور سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں فاصلہ ۱۲ جانے پر اس نے چوٹی کا ارتقاع ۶ دیکھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی ۱۲۵ ہے یا ۱۸۵

۱۹۔ سطح افقی پر ایک برج ہے، برج کے قاعدہ سے

اور پانچ فٹ کے فاصلہ پر بیج کی سیدھ میں دو نقاط ہیں اور ان پر
ارتفاعی زاوے بیج کی چوٹی کے عمادی جتنے ہیں وہ ایک دوسرے
کے متعم میں ثابت کرو کہ بیج کا ارتفاع $\frac{1}{2}$ فٹ ہے۔
دو نقاط کے خط وصل کے عمادی بیج کی چوٹی پر زاویہ طہ بنے
ثابت کرو کہ

بیب طہ = ۱-۲

۲۔ ایک ۹۰ فٹ اونچے ٹیلے کی چوٹی پر ایک ۱۵۰ فٹ بلند
 بچ ہے ، معلوم کرو کہ ٹیلے کے پاؤں سے جو سطح گزرتی ہے اس کے
 اس مقام پر ایک شخص کھڑا ہو کہ برج اور ٹیلہ کے محاذی اس کی
 آنکھ پر برابر زاوے بنیں ، آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ہے

۲۱۔ سطح ہوار پر ایک ستون ہے اور ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے، اگر ایک شخص کی آنکھ پر بت کے مخاوی بڑے سے بڑا داویہ عہ بنے جبکہ وہ ستون سے ج فٹ کے فاصلہ پر ہو تو نسبت کرو کہ بت کی بلندی ۲ ج مس عہ فٹ ہے، ستون کی بلندی بھی دریافت کرو۔

۲۲۔ ایک سطح مائل اور سطح ہموار کے خط فضل پر ایک
بیج ہے اور سطح مائل افق سے زاویہ ۹۰ بناتی ہے، اگر پائیں
بیج سے سطح مائل کے اوپر کی طرف ۱۰۰ فٹ لیا مستقیم خط
نپا جائے اور اس خط کے سرے پر بیج کے معادی زاویہ
۴۵° بنے تو بیج کی بلندی دریافت کرو۔ معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰.۱۰۳

نوڪ ۲۳ ۱۴ ۱۱ ۲۶ ۵۸ ۲۵ =

اور ل جب $52 = 90.4954$

۲۳ — ایک ڈھلان افق سے 15° کا زاویہ بناتی ہے، اس پر ایک عمودی برج قائم ہے، ایک شخص پائین برج سے ڈھلان کے اوپر کی طرف ۸ فٹ چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر برج کے عمودی زاویہ 30° بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی

۴۰ (۶۱ - ۶۲) فٹ ہے

۲۴ — ایک چٹان کا ارتفاع ۷۴ ہے، ایک شخص ایک سطح مائل پر جو افق سے 30° کا زاویہ بناتی ہے ۱۰۰۰ فٹ چٹان کی طرف چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اس کا ارتفاع ۷۴ ہے اگر جب 54.3135 تو اس مقام سے چٹان کی عمودی بلندی دریافت کرو جہاں سب سے پہلے زاویہ ارتفاع مشاہدہ کیا گیا۔

۲۵ — ایک شخص نے ایک سطح مائل پر ج فٹ اوپر جا کر دیکھا کہ اس کے پائین سے جو سطح مستوی گذرتی ہے اس پر ایک چیز کا زاویہ انحناس 30° ہے، ج فٹ اور اوپر جا کر اس نے دیکھا کہ اسی چیز کا زاویہ انحناس 45° ہے ثابت کرو کہ سطح مائل افق سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا عاقل مقام (۲) 30° ہے۔

۲۶ — ایک متقن مینار مربع قاعدہ پر قائم ہے، اس کا ایک کنارہ ۱۵۰ فٹ اور اس کے قاعدہ کا ایک ضلع ۲۰۰ فٹ ہے اس کے ایک رخ کا میلان قاعدہ سے دریافت کرو۔

۲۷ — ایک مینار کے مربع قاعدے کا ضلع ۱ ہے اور اس کا

اس ایک ایسے خط مستقیم پر واقع ہے جو قاعدے کے نقطہ وسط
میں سے گزرتا ہے اور اس پر عمود ہے، مینار کی بلندی ح فٹ
ہے، ثابت کرو کہ مینار کے متصل رخوں کا درمیانی زاویہ مساوات ذیل
سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}$$

۲۸ — ایک مساوی الاضلاع مثلث کے مرکز پر ایک ... افٹ
اوپنچا علم قائم ہے، مثلث متوازی الاضلاع ہے، علم کی چوٹی پر
ہر ایک ضلع کے عمادی زاویہ ۹۰° بنتا ہے، ثابت کرو کہ مثلث
کے ضلع کا طول ۵۰ فٹ ہے۔

۲۹ — مربع قاعدہ پر ایک مینار ہے اور اس کی چوٹی پر ایک
۶ فٹ اوپنچا علم ہے، اگر علم کا سایہ عین قاعدہ کے ایک ضلع
تک پہنچے اور اس ضلع کے سروں سے ۵۶ اور ۸ فٹ کے
فاصلہ پر ہو تو سوچ کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو، مینار کی بلندی
۳۴ فٹ ہے۔

۳۰ — مربع قاعدہ پر ایک مینار قائم ہے، اس کی چوٹی پر
ایک ۶ فٹ اوپنچا علم ہے، علم کا سایہ عین قاعدہ کے ضلع تک
پہنچتا ہے اور اس ضلع کے سروں سے ۱۱ اور ۸ فٹ کے
فاصلہ پر ہے، ثابت کرو کہ مینار کی بلندی $\frac{11 + 8}{2}$ مس عہ ۶ ہے
جہاں عہ سوچ کا زاویہ ارتفاع ہے۔

۳۱ — ایک نقطہ ایک جھیل کی سطح سے ح فٹ اوپنچا ہے اور اس

نقطہ سے ایک بادل کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اگر جمیل میں بادل کے عکس کا زاویہ انحناس دیکھا جائے تو وہ یہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ بادل کی بلندی

ح جب (ج + عہ) ہے

۳۲ — ایک برج کا سایہ کسی خاص وقت اس کی بلندی کا نصف تھا کچھ عرصہ بعد سایہ بلندی کے برابر تھا۔ معلوم کرو کہ اس عرصہ میں سورج کا زاویہ ارتفاع کتنا کم ہوا ہے، معلوم ہے

$$\text{لوک } ۲ = ۱۰۳ - ۵۳ = ۵۰ \quad \text{ل مس } ۶۳^{\circ} ۲۶' = ۹۹۹۴ - ۵۳۰۰ = ۱۰۵۳$$

اور فرق ۱ کیلئے = ۳۱۵۹

۳۳ — ایک تختی کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے اور وہ سورج کے مقابل سطح عمودی میں رکھی گئی ہے، اگر تختی کا قاعدہ ۱۲ اونچائی ح اور سورج کا ارتفاع ۳۰ ہو تو ثابت کرو کہ تختی کے سایہ کے راس پر جو زاویہ بنتا ہے اس کا عکس

$$\frac{۳۱۵۹}{۳۱} = ۱۰۱.۹۰۳$$

۳۴ — سطح افقی پر نشانہ لگانے کا چاند سیدھا کھڑا کیا گیا ہے، اگر اس کا رخ جنوب کی طرف ہو اور وہ شکل میں مستطیل ہو تو جو اس کی سطح کا رقبہ ہے اس کا مقابلہ اس کے سایہ کے رقبہ سے اس وقت کرو جبکہ سورج کا ارتفاع عہ ہو اور سورج جنوب سے زاویہ یہ بنائے۔

۳۵ — ایک کرہ کا قطر ق ہے اور جب اس کے مرکز کا ارتفاع بہ ہو تو اس کے عمادی ایک شخص کی آنکھ پر زاویہ عہ بتا ہے، ثابت کرو کہ کرہ کے مرکز کی بلندی

۱۲ ق جب بہ قم ہے

۳۶ — ایک شخص سطح افقی پر کھڑا ہو کر ایک مساوی اور مساوی الفصل ستونوں کی قطار کو دیکھ کر یہ نتیجہ نکالتا ہے کہ جو زاویہ دسویں اور سترہویں ستون کے غازی اس کی آنکھ پر جیتے ہیں وہ اس صورت میں بھی وہی رہینگے اگر انکو پہلے ستون کی جگہ لاکر کھڑا کر دیا جائے اور انکی بلندیاں کو بالترتیب بقدر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کے کم کر دیا جائے اگر آنکھ کی بلندی کو نظر انداز کر سکیں تو ثابت کرو کہ ستونوں کی قطار اس خط سے جو اسکی آنکھ کو پہلے ستون کے ساتھ ملانے سے پیدا ہو ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا قاطع ۲۶ ہے۔

اشد ذیل کے حل کرٹ میں لوکار تہی بد دونوں کی ضرورت ہوگی

۳۷ — ایک دریا کے مقابل کے کناروں پر دو نقاط ۱ اور ۲ ایک دوسرے کے سامنے واقع ہیں اور انکے درمیان ایک جہاز کا شونا م ن ہے، دریا کا عرض ۱۰۰۰ فٹ ہے اور نقطہ ۱ پر م کا زاویہ ارتفاع ۶۴ ہے اور نقطہ ۲ پر ارتفاع ۸۰ ہے، خط ۱ ب پر م کی بلندی دریافت کرو۔

۳۸ — خط ۱ ب کا طول ۱۰۰۰ گز ہے، ب نقطہ ۱ کے ٹیک شمال کی طرف واقع ہے اور ب سے ایک دور کے نقطہ ط کی سمت، شمال سے مشرق کی جانب میں زاویہ ۷۰ کا بناتی ہے اور نقطہ ۱ پر یہ سمت شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۲ بناتی ہے، ۱ اور ط کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

۳۹۔ ب کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلے پر ایک مقام ۱ ہے، نقطہ ۱ سے ایک چٹان کی سمت، شمال سے شرق کی طرف کو زاویہ ۴۴° ۱۹ بناتی ہے اور نقطہ ب سے سمت، شمال سے مغرب کی جانب میں زاویہ ۲۶° ۵۱ بناتی ہے، خط ۱ ب سے چٹان کا فاصلہ شمال کی جانب میں دریافت کرو۔

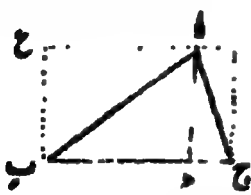
۴۰۔ ایک افقی مربع احاطہ کے ایک ضلع کا طول ۱ ہے اور میں اس کے نقطہ وسط کے اوپر سمت راس میں ایک مینار کی چوٹی ہے، مربع کی سطح سے چوٹی کی بلندی ب ہے اگر سورج کا ارتفاع طہ ہو اور مینار کا سایہ مربع کے ٹھیک ایک کونے تک پہنچے تو ثابت کرو کہ ب ۲۱ = ۱ مس طہ اگر ۱ = ۱۰۰۰ فٹ اور طہ = ۲۵° ۱۵ تو ب کی قیمت دریافت کرو۔



باب پانزدہم

مثلث کے خواص

۲۰۴۔ مثلث کا رقبہ۔ فرض کرو کہ کوئی مثلث ا ب ج ہے اور زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود ا د نکالا گیا ہے۔



نقطہ ا میں سے ب ج کے متوازی خط ع ا ف کھینچو اور اس پر عمود ب ع اور ج ف نکالو۔

بوجب اقلیدس م ا ش ۱۴، مثلث ا ب ج کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \text{مستطیل ب ا ف} = \frac{1}{2} \text{ب ج} \times \text{ج ف}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ا د} \times \text{ا د}$$

لیکن ا د = ا ب جب ب = ج جب ب
اسلئے مثلث ا ب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2} \text{ا ب} \times \text{ج ب}$

اس رقبہ کو بالعموم Δ سے تعبیر کرتے ہیں

اس لئے $\Delta = \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta \text{ جب ب} = \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta \text{ جب ج}$

$$= \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta \text{ جب } \Delta \dots\dots\dots (1)$$

بموجب دفعہ ۱۷۵ جب $\Delta = \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta$ ان (ن-و) (ن-ب) (ج-ج)

یعنی $\Delta = \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta$ جب

$$= \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta \text{ ان (ن-و) (ن-ب) (ج-ج)} \dots\dots\dots (2)$$

اس مقدار کو اکثر Δ سے تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۳۵

مثلاً اب ج کا رقبہ دریافت کرو جبکہ

$$1 - \Delta = 13 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 15$$

$$2 - \Delta = 18 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 30$$

$$3 - \Delta = 25 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 43$$

$$4 - \Delta = 32 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 62$$

$$5 - \Delta = 39 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 79$$

$$6 - \Delta = 46 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 96$$

$$7 - \Delta = 53 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 113$$

$$8 - \Delta = 60 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 130$$

$$9 - \Delta = 67 \text{ ج } \Delta \text{ اور ج } = 147$$

- کہ مثلث کا رقبہ $(۶ + ۲۴) \times ۳$ مربع انچ ہے
- ۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۱۹، ۱۱۱، ۹۲ گز ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ایک ایکڑ سے دس مربع گز کم ہے۔
- ۱۱۔ ایک مثلثی کھیت کے اضلاع ۲۴۲، ۱۲۱۲، ۱۲۵۰ گز ہیں ثابت کرو کہ کھیت کا رقبہ ۶ ایکڑ ہے
- ۱۲۔ ایک شخص کو ایک ایسا مثلثی احاطہ بنانے کی اجازت ملی جس کے اضلاع بالترتیب ۱۵، ۴۱، ۲۱ گز ہیں غلطی سے اس نے پہلے ضلع کو ایک گز بڑا بنا لیا، اگر احاطہ کا رقبہ اور مجموعہ اضلاع وہی رکھنا منظور ہو جو اوپر بتوئیر ہوا تو باقی دو اضلاع کے طول دریافت کرو۔
- ۱۳۔ ایک متساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ۱۳ انچ ہے اور اس کا رقبہ ایک اور مثلث کے رقبہ کے برابر ہے جس کے اضلاع ۶، ۱۳، ۱۵، ۱۵، ۴، ۱۵ انچ ہیں، مثلث اول الذکر کے مساوی ضلعوں میں سے ایک کی قیمت ۱۰۰۰ روپے انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو،
- ۱۴۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2} \times \text{بیس} \times \text{جیب}$ کے برابر ہے
جہاں
- اگر مثلث کا ایک زاویہ ۹۰ ہو، رقبہ ۱۰ ماہر مربع فٹ اور مجموعہ اضلاع ۲۰ فٹ تو اضلاع کے طول دریافت کرو
- ۱۵۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور اس کا رقبہ ایک ایسے مثلث متساوی الاضلاع کے رقبہ کا $\frac{3}{4}$ ہے جس کا مجموعہ اضلاع مثلث اول الذکر کے مجموعہ اضلاع کے برابر ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع کی باہمی نسبتیں ۳ : ۵ : ۷ ہے، نیز مثلث کا سب سے

بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۱۶۔ ایک مثلث میں سب سے چھوٹا زاویہ ۴۵° ہے اور زاویہ کے ماس سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اگر اس کا رقبہ ۳ مربع گز ہو تو کرو کہ اضلاع کے طول ۳، ۴، ۵ اور ۶ فٹ ہیں اور باقی زاویہ کے ماس بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں

۱۷۔ کسی مثلث کے دو اضلاع کے طول بالترتیب ۱ فٹ ۱ ہیں اور چھوٹے زاویے کے مقابل کا زاویہ ۳۰° درجہ ہے، اثبات کرو کہ دو مثلث شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں، ان کے زاویے درجہ کرو اور ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۱۴:۱۱ ہے۔
۱۸۔ مفروضات ذیل سے دو مثلث حاصل ہوتے ہیں، کی مدد سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو

$$1 = 31, 2 = 15, 3 = 5 \text{ انچ اور } 4 = 2 \text{ انچ}$$

۲۰۵۔ مثلث کے متعلقہ دائرے

جو دائرہ مثلث کے نقاط راس میں سے گزرتا ہے اس کے گرد بنا ہوا دائرہ یا اختصاراً مثلث کا بیرونی دائرہ ہیں۔

اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م ۴ ش ۵ کے عمل سے ہو سکتا ہے اس کے نصف قطر کو ہم r سے تعبیر کریں جو دائرہ مثلث کے اندر اس طرح سے پہنچ سکے کہ وہ اس کے ہر ایک ضلع کو مس کرے اس کو اختصاراً r

انہی دائرہ کہتے ہیں اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م م ش کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے نصف قطر کو ہم آئندہ ر سے تعبیر کریں گے۔

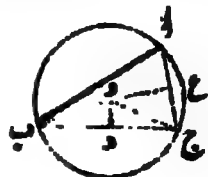
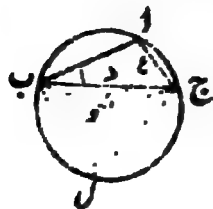
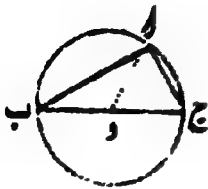
جو دائرہ ضلع ب ج اور باقی دو اضلاع ا ب اور ا ج مدد وہ میں سے ہر ایک کو مس کرے اس کو زاویہ ا کے مقابل مثلث کا جانبی دائرہ کہتے ہیں اس کے نصف قطر کو ہم ر سے تعبیر کریں گے

اسی طرح سے حرف ر سے ہم اس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کریں گے جو ضلع ج ا اور باقی دو اضلاع ب ج اور ب ا مدد وہ کو مس کرے۔

نیز یہ سے ہم اس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کریں گے جو ضلع ا ب اور باقی دو اضلاع ج ا اور ج ب مدد وہ کو مس کرے ۲۵۶۔ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر سا دریافت کرو۔

اضلاع ب ج اور ج ا کی تنصیف نقاط د اور ع پر کر دو اور ب ج اور ج ا پر عمود د و اور ع و قائم کرو۔

بوجب اقلیدس م م ش ہ نقطہ و مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے، و ب اور و ج کو ملاؤ



نقطہ مثلث کے اندر واقع ہو سکتا ہے (شکل ۱) یا باہر (شکل ۲) یا مثلث کے ایک ضلع پر (شکل ۳)
پہلی شکل میں مثلث ب و د اور ج و د آپس میں برقرار
برابر ہیں۔ اس لئے

$$\angle ب و د = \angle ج و د$$

$$\therefore \angle ب و د = \frac{1}{2} \angle ب و ج$$

$$= \angle ب ا ج \text{ (اقلیدس م ۳ ش ۲۰)}$$

$$ا =$$

$$\text{ نیز } ب ا د = ب و جب ب و د$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \text{م } جب ا$$

اگر ا منفرجہ ہو جیسا کہ شکل ۲ میں تو

$$\angle ب و د = \frac{1}{2} \angle ب و ج = \angle ب ل ج$$

$$= ۱۸۰ - ا \text{ (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)}$$

یعنی بموجب سابق، جب ب و د = جب ا اور م = $\frac{1}{2} ا$
اگر ا زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ شکل ۳ میں تو

$$\text{م } = ا = و ج = \frac{1}{2} ا$$

$$= \frac{1}{2} ا \text{ چونکہ اس صورت میں جب } ا$$

اس سے معلوم ہوا کہ مندرجہ بالا ارباب سب مثلثوں کے

درست ہے۔

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۳ نقطہ سے اندرونی دائرہ کا مرکز۔
سے لا کو ملاؤ اور تینوں اضلاع پر عمود سے دے ' سے ع ' کے
بکالو۔

تب $\Delta = د = ع = م = ف = ر$

اب رقبہ Δ سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ $\Delta = د = ع = م = ف = ر$

رقبہ Δ سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ $\Delta = د = ع = م = ف = ر$

اور رقبہ Δ سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ $\Delta = د = ع = م = ف = ر$

اس لئے جمع کرنے سے

$\frac{1}{2} \times ر + \frac{1}{2} \times ر + \frac{1}{2} \times ر = 3 \times ر$ مثلثات

سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ اور سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ کے رقبوں کا مجموعہ

$\Delta = د = ع = م = ف = ر$

یعنی $\frac{1}{2} \times (د + ع + م + ف + ر) = 3 \times ر$

یعنی $\frac{1}{2} \times (د + ع + م + ف + ر) = 3 \times ر$

$\frac{1}{2} \times (د + ع + م + ف + ر) = 3 \times ر$

۲۰۹۔ چونکہ زاوے سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ اور سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ باؤ

زاویا سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ اور سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ کے برابر ہیں اس

مثلث سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ اور سے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ ہر طرح سے برابر ہیں

اس لئے $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ یعنی $\Delta = د = ع = م = ف = ر$

نیز $\Delta = د = ع = م = ف = ر$ یعنی $\Delta = د = ع = م = ف = ر$

اور ج ع = ج د یعنی ۲ ج ع = ج ع + ج د
اس لئے جمع کرنے سے

$$۲ ب د + ۲ ا ع + ۲ ج ع = (ب د + ج د) + (ج ع + ا ع) + (ا ف + ف ب)$$

یعنی ۲ ب د + ۲ ا ع + ۲ ج ع = ۲ ب ج + ۲ ج د + ۲ ا ب

$$۲ ب د + ۲ ا ع = ۲ ب ج + ۲ ج د = ۲ ن$$

اس لئے ب د = ن - ب = ج ع

اسی طرح ج ع = ن - ج = ج د

اور ا ف = ن - ا = ا ع

$$ا ب = \frac{۲ ب د}{۲} = مس ب د = مس \frac{۲ ب د}{۲}$$

$$۲ ر = ۲ ب د = مس ب د = مس \frac{۲ ب د}{۲} = (ن - ا) مس \frac{۲ ب د}{۲}$$

$$پس ۲ ر = ۲ ج ع = ج ع مس ج ع = (ن - ج) مس ج ع$$

$$اور نیز ۲ ر = ۲ ا ف = ا ف مس ا ف = (ن - ا) مس ا ف$$

$$اس لئے ۲ ر = (ن - ا) مس ا ف = (ن - ب) مس ب د$$

$$= (ن - ج) مس ج ع$$

۲۱۰۔ ر کی ایک تیسری قیمت اس طرح سے حاصل

ہو سکتی ہے۔

$$ا = ۲ ب د + ۲ ج ع = ۲ ب د + ۲ ج د + ۲ ا ب + ۲ ج ع$$

$$= \text{رم } \frac{\text{پ}}{۲} + \text{رم } \frac{\text{ج}}{۲}$$

$$= \left[\frac{\text{جم } \frac{\text{پ}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{پ}}{۲}} + \frac{\text{جم } \frac{\text{ج}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{ج}}{۲}} \right] \text{ر}$$

$$\therefore \text{جب } \frac{\text{پ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ج}}{۲} = \text{ر} \left[\text{جب } \frac{\text{ج}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{پ}}{۲} + \text{جم } \frac{\text{ج}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{پ}}{۲} \right]$$

$$= \text{رجب} \left(\frac{\text{پ}}{۲} + \frac{\text{ج}}{۲} \right) = \text{رجب} \left(\frac{۱}{۲} - ۰.۹ \right)$$

$$= \text{رجم } \frac{۱}{۲} \\ \therefore \text{ر} = \frac{\text{جب } \frac{\text{پ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ج}}{۲}}{\text{جم } \frac{۱}{۲}}$$

نتیجہ صریح - چونکہ $۱ = ۲ \text{ ر جب } ۱ = ۴ \text{ ر جب } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}$

اس لئے $\text{ر} = ۴ \text{ ر جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{\text{پ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ج}}{۲}$

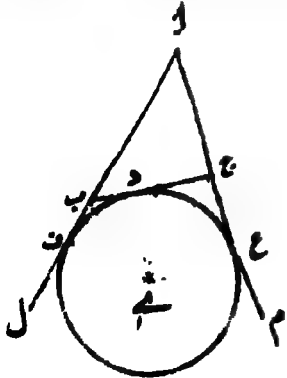
۲۱۱ - مثلث ا ب ج کے زاویہ ۱ کے مقابل جو جانب

بن سکتا ہے اُس کا نصف قطر

لم دریافت کرو

ا ب اور ا ج کول اور م تک خارج کرو

زاویوں ج ب ل اور ب ج م کی



تفصیف خطوط ب مے اور ج مے سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ مے پر ملتے ہیں۔

تینوں اصلاخ پر عمود مے د، مے ع اور مے ف نکالو۔
ثلاث مے د ب اور مے ف ب ہر طرح سے برابر ہیں، اسلئے

$$\text{مے ف} = \text{مے د}$$

اسی طرح سے مے ع = مے د

چونکہ تینوں عمود مے د، مے ع، مے ف آپس میں برابر ہیں،
اس لئے نقطہ مے دائرہ مجوزہ کا مرکز ہے

اب رقبہ اب مے ج مثلث اب ج اور مے ب ج
کے مجموعہ کے برابر ہے

نیز یہ رقبہ مثلثات مے ب ا اور مے ج ا کے مجموعہ کے بھی
برابر ہے

اس لئے $\Delta \text{اب ج} + \text{مے ب ج} = \Delta \text{مے ج ا} + \Delta \text{مے اب}$
 $\frac{1}{2} \times \text{مے د} \times \text{ب ج} = \frac{1}{2} \times \text{مے ع} \times \text{ج ا} + \frac{1}{2} \times \text{مے ف} \times \text{اب}$
یعنی $\frac{1}{2} \times \text{د} \times \text{ب ج} = \frac{1}{2} \times \text{ع} \times \text{ج ا} + \frac{1}{2} \times \text{ف} \times \text{اب}$

$$\therefore \text{د} = \frac{[\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}] \times \text{ر}}{[\text{ا} - \frac{\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}}{2}]} = \frac{[\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}] \times \text{ر}}{[\text{ا} - \frac{\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}}{2}]} = \frac{[\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}] \times \text{ر}}{[\text{ا} - \frac{\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}}{2}]}$$

$$\therefore \frac{\text{د}}{\text{ا} - \frac{\text{ب ج} + \text{ع ج} - \text{ا}}{2}} = \frac{\text{ر}}{1}$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ن}{ب} = پ \text{ اور } \frac{ن}{ج} = ر$$

۲۱۲۔ چونکہ اوع اور اف میں سے ہر ایک دائرہ کا ماس

اس لئے بموجب دفعہ ۲۰۹، اوع = اف

اسی طرح سے ب ف = ب د اور ج ع = ج د

$$\therefore اوع = اف = اب + ب ف + اج + ج ع$$

$$= اب + ب د + اج + ج د$$

$$= اب + ب ج + ج د = ۲ن$$

$$\therefore اوع = ن = اف$$

$$\text{نیز } ب د = ب ف = اف = اب = ن = ج$$

$$\text{اور } ج د = ج ع = اوع = اج = ن = ب$$

$$\therefore ع = اوع = مس = اوع$$

$$\text{یعنی } ر = ن = مس$$

۲۱۳۔ لہ کی ایک تیسری قیمت و اور زوایا ب اور ج

کی رقوم میں اس طرح حاصل ہو سکتی ہے

چونکہ ب ج زاویہ ب ج ع کی تنصیف کرتا ہے اس لئے

$$\angle ب ج د = \frac{1}{2} (ج - اوع) = ۹۰ - \frac{ج}{2}$$

$$\text{اس لئے } \angle ب د = ۹۰ - \frac{ب}{2}$$

$$\therefore \angle ب ج = ب د + ج د$$

$$= ب د + ب د + ج د = ۲ ب د + ج د$$

$$= \text{د} \left(\text{مس} \frac{\text{پ}}{\text{ج}} + \text{مس} \frac{\text{ج}}{\text{پ}} \right)$$

$$= \text{د} \left(\frac{\text{ج} \frac{\text{ب}}{\text{پ}} + \text{ج} \frac{\text{پ}}{\text{ب}}}{\text{ج} \frac{\text{پ}}{\text{ج}} + \text{ج} \frac{\text{ب}}{\text{ب}}} \right)$$

$$= \text{د} \text{ جم } \frac{\text{پ}}{\text{ج}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{پ}} = \text{د} (\text{ج} \frac{\text{ب}}{\text{پ}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{پ}} + \text{ج} \frac{\text{پ}}{\text{ب}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{پ}})$$

$$= \text{د} \text{ جب } \left(\frac{\text{ب}}{\text{پ}} + \frac{\text{ج}}{\text{پ}} \right) = \text{د} \text{ جب } (90^\circ - \frac{1}{4}) = \text{د} \text{ جم } \frac{1}{4}$$

$$= \text{د} = \text{د} \text{ جم } \frac{\text{پ}}{\text{ج}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{پ}}$$

نتیجہ صریح - چونکہ $\text{د} = 2$ ر جب $\text{د} = 4$ ر جب $\frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$ جم
اسلئے $\text{د} = 4$ ر جب $\frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$ جم

امثلہ نمبری ۳۶

۱۔ ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب ۱۸، ۲۴، ۳۰ لیج ہیں ثابت کرو کہ بیرونی دائرہ اندرونی دائرہ اور تین جانبی دائروں کے نصف قطر بالترتیب ۱۵، ۶، ۱۲، ۸ اور ۳۶ لیج ہیں

۲۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵ فٹ ہیں ثابت کرو کہ
(۱) $\frac{1}{2} \times 8$ فٹ (۲) $\text{د} = 4$ فٹ (۳) $\text{د} = \frac{1}{4} \times 10$ فٹ

(۴) $\text{د} = 12$ فٹ اور (۵) $\text{د} = 14$ فٹ

۳۔ اگر مثلث $\text{د} \text{ ب} \text{ ج}$ میں $\text{د} = 13$ ، $\text{ب} = 14$ اور $\text{ج} = 15$

$$۱۷ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

$$۱۸ - ۲ + ۲ - ۲ = ۴$$

$$۱۹ - (۲-۲)(۲-۲)(۲-۲) = ۴$$

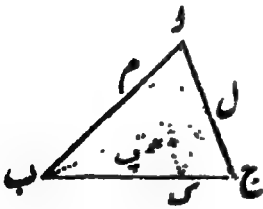
$$۲۰ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$۲۱ - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$۲۲ - ۲ + ۲ + ۲ = ۱۶ - ۲ - ۲ - ۲$$

۲۱۴ - مثلث پائین اور مرکز عمودی

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے اور زاویوں 'ا' ب 'ج' سے مقابل کے اضلاع پر عمود بالترتیب 'ک' 'ل' اور 'م' نکالے گئے ہیں۔



علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ یہ تینوں عمود ایک نقطہ مشترک پ پر ملتے ہیں، اس نقطہ کو مثلث کا مرکز عمودی کہتے ہیں۔ مثلث ک ل م جو ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنتا ہے ا ب ج کا مثلث پائین کہلاتا ہے۔

۲۱۵ - مرکز عمودی سے مثلث کے رؤس الزوايا کے

فاصلے دریافت کرو۔

پ ک = ک ب مس پ ب ک = ک ب مس (ج - ۹۰)

= ا ب جم ب مم ج = ج ب ج جم ب جم ج

= ۲ مس جم ب جم ج (دفعہ ۲۰۶)

نیز ا پ = ا ل × قط ک ا ج

= ج جم ا × ق م ج

= ج ب ج × جم ا

= ۲ مس جم ا (دفعہ ۲۰۶)

پس ب پ = ۲ مس جم ب اور ج پ = ۲ مس جم ج
لہذا مرکز عمودی کے فاصلے زاویوں کے راسوں سے ۲ جم ا
۲ جم ب، ۲ مس جم ج ہیں۔ اور اضلاع سے اس کے فاصلے
۲ جم ب جم ج، ۲ مس جم ج جم ا اور ۲ مس جم ا جم ب ہیں۔
۲۱۶ - مثبت پائیں کے اضلاع اور زاوے دریافت کرو

چونکہ زاوے پ ک ج اور پ ل ج دونوں قائمے ہیں،
اس لئے نقاط پ، ل، ج اور ک سب ایک دائرہ کے
محیط پر واقع ہیں۔

پ ک ل = پ ج ل (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)

= ۹۰ - ا

اسی طرح سے پ، ب، ک اور م ایک دائرہ کے محیط واقع

اس لئے

$$\angle پ ک م = \angle پ ب م$$

$$1 - 40 =$$

$$\angle م ک ل = 180 - 12 =$$

$$= \text{تکملہ زاویہ } 12$$

$$\angle ک ل م = 180 - 2 =$$

$$\angle ل م ک = 180 - 2 =$$

مثلاً ل م سے

$$\frac{\text{ل م}}{\text{ج ب ل}} = \frac{\text{ل ل}}{\text{ج ب ل م}} = \frac{\text{ل ب ج م}}{\text{ج ب م ل}}$$

$$\frac{\text{ج ج م ل}}{\text{ج ب ج}} = \frac{\text{ج ج م ل}}{\text{ج ب ل}}$$

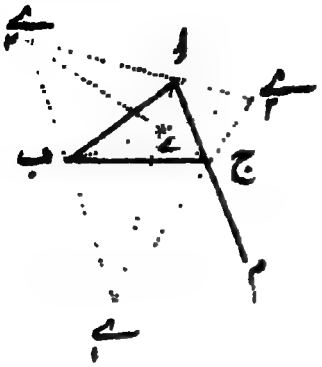
$$\text{ل م} = \frac{\text{ج ج}}{\text{ج ب ج}} \text{ جب ل ج م ل}$$

$$= \text{ل ج م ل} \quad (\text{دفعہ } 149)$$

$$\text{م ک} = \text{ب ج م ل اور ک ل} = \text{ج ج م ج}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث پائین کے اضلاع ل ج م ل، ب ج م ل، ج ج م ل ہیں۔ اور اس کے زاویے 12، 2، 180 - 2 ج ہیں۔

۲ = فرض کرو کہ سے اندرونی دائرو کا مرکز ہے اور
اس سے اسے اُن جانبی دائروں کے مرکز ہیں جو بالترتیب



ا، ب، ج کے محاذی ہیں۔

جیسا وقت ۲۰۸ اور ۲۱۱ میں

ہم نے دیکھا ہے ج زاویہ

ا، ج ب کی تنصیف کرتا ہے

اور ے ج زاویہ ب ج م کی

تنصیف کرتا ہے۔

$$\angle \text{ے ج م} = \angle \text{ے ج ب} + \angle \text{ب ج م}$$

$$\frac{1}{2} \angle \text{ا، ج ب} + \frac{1}{2} \angle \text{ب ج م} =$$

$$\frac{1}{2} [\angle \text{ا، ج ب} + \angle \text{ب ج م}] =$$

$$= \frac{1}{2} \times 180^\circ = \text{ایک زاویہ قائمہ}$$

اسی طرح سے $\angle \text{ے ج م}$ بھی قائمہ ہے

لہذا ے ج م ایک خط مستقیم ہے اور ے ج اس پر عمود ہے

اسی طرح سے ے ا مے ایک خط مستقیم ہے اور اس پر ے ا

عمود ہے اور ے ب مے خط مستقیم ہے اور ے ب اس پر

عمود ہے۔

نیز چونکہ ے ا اور ے ا دونوں زاویہ ب ا، ج کی

تنصیف کرتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ تینوں نقطے 'ا، ب، ج'

ایک خط مستقیم پر واقع ہیں، اسی طرح سے ب ے مے

اور ج ے مے بھی مستقیم خط ہیں۔

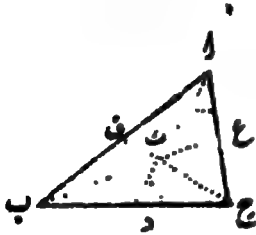
لہذا ثابت ہوا کہ ے مے مے ایک مثلث ہے جس میں

اُب ج اُن عمودوں کے پائین ہیں جو نقاط راس سے
مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں اور سے اُن عمودوں
کا نقطہ تقاطع ہے یا دوسرے الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان
کر سکتے ہیں کہ مثلث ہے ہے ہے کا مثلث پائین اُب ج
سے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ سے ہے

مثلث ہے ہے ہے کو اکثر جانبی مرکزوں کا مثلث کہتے ہیں

۲۱۸۔ مثلث کا مرکز ہندی اور وسطانیات

اگر اُب ج کوئی مثلث ہو اور د 'ع' ف اضلاع ب ج
ج ا 'ا ب کے نقاط تنصیف ہوں تو خطوط ا د 'ب ع
ج ف میں سے ہر ایک کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں



علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں
یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث
کے وسطانیات ایک مشترک
نقطہ ت پر ملتے ہیں اور

$$ا ت = \frac{2}{3} ا د , ب ت = \frac{2}{3} ب ع$$

$$ج ت = \frac{2}{3} ج ف$$

اور نقطہ ت کو مثلث کا مرکز ہندی کہتے ہیں

۲۱۹۔ وسطانیات کے طول

بوجب دفعہ ۱۷۰

$$۱ د = ۱ ج + ۱ ج - ۱ ج - ۱ ج \times ج د جم ج$$

$$= ب ا + \frac{۱}{۲} - ۱ ج - ۱ ج جم ج$$

$$اور ج = ب ا + ۱ ج - ۱ ج - ۱ ج جم ج$$

$$اس لئے ۱ ج - ۱ ج = ب ا - \frac{۱}{۲}$$

$$پس ۱ د = ۱ ج + ۱ ج - ۱ ج - ۱ ج$$

$$نیز ۱ د = ۱ ج + ۱ ج + ۱ ج - ۱ ج جم ج (دفعہ ۱۰)$$

$$نیز ب ع = ۱ ج + ۱ ج - ۱ ج - ۱ ج$$

$$اور ج ف = ۱ ج + ۱ ج - ۱ ج - ۱ ج$$

۲۲۰۔ جو زاوے کوئی وسطانیہ اضلاع کے ساتھ بناتا۔

اُن کو دریافت کرو

اگر $\angle ب ا د = ۱ ج$ اور $\angle ج ا د = ۱ ج$

$$تو جب ج = \frac{۱ ج}{۱ د} = \frac{۱ ج}{۱ د}$$

$$\therefore جب ج = \frac{۱ ج}{۱ د} = \frac{۱ ج}{۱ د}$$

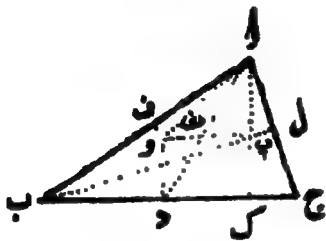
$$اسی طرح سے جب ب = \frac{۱ ج}{۱ د}$$

نیز اگر $\angle ا د ج = ط$ تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اج}}{\text{د}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

$$\therefore \text{جب ط} = \frac{\text{ب جب ج}}{\text{لا}} = \frac{۲ \text{ ب جب ج}}{\text{م ۲ ب ۱ + ج ۲ - د}}$$

پس جو زاوے د اضلاع سے بناتا ہے وہ معلوم ہوئے
۲۲۱ - ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ہندسی ہمیشہ اس خط پر



واقع ہوتا ہے جو بیرونی مرکز اور
مرکز عمودی کو ملائے سے پیدا
فرض کرو کہ نقطہ و بیرونی دائرہ کا
مرکز ہے اور پ مرکز عمودی ہے

ضلع ب ج پر عمود د د اور

پ ک نکالو اور فرض کرو کہ د اور و پ نقطہ نشا پر
ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثلث و ث د اور پ ث ا کے زاوے باہم برابر ہیں

نیز بموجب دفعہ ۲۰۶

$$\text{د د} = \text{س ج م}$$

اور بموجب دفعہ ۲۱۵

$$\text{ا پ} = ۲ \text{ س ج م}$$

اس لئے بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴

$$\frac{\text{ا ث}}{\text{ث د}} = \frac{\text{ا پ}}{\text{د د}} = ۲$$

لہذا نقطہ مٹ مثلث کا مرکز ہندسی ہے ،
نیز مسئلہ مذکورہ بالا کی مدد سے

$$\frac{وٹ}{مٹ پ} = \frac{وڈ}{ا ب} = \frac{۱}{۲}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث کا مرکز ہندسی اُس خط پر واقع
جو بیرونی دائرہ کے مرکز کو مرکز عمودی کے ساتھ ملاتا ہے
اس خط کو ۱:۲ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ۔

نیز عمل ہندسی سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مثلث کے
نو نقطہ (یعنی ایسے دائرہ کا مرکز جو عمودوں
پایوں اور ضلعوں کے نقاط تنصیف اور اُن خطوط کے وسط
نقاط میں سے ہو کر گزرے جو مثلث کے نقاط راس کو مرکز
سے ملاتے ہیں) ہمیشہ خط وپ پر واقع ہوگا اور اس
تصنیف کریگا ۔

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ بیرونی دائرہ کا مرکز، مرکز ہندسی ،
نو نقطہ دائرہ کا مرکز اور مرکز عمودی چاروں نقطے ایک خط مستقیم
پر واقع ہیں ۔

۲۲۲۔ بیرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی
دریافت کرو ۔

اگر ا ب پر عمود و ف نکالا جائے تو

$$\angle و ا ف = ۹۰^\circ - \angle ا و ف = ۹۰^\circ - ج$$

$$\angle پ ا و = ۹۰^\circ - ج$$

۱۔ واپ = ۱۔ ۱۔ دائرہ - ۱۔ پ اول

$$۱۸ = ۱ - ۱ = (۹۰ - ج) ۲ - ۱ = ۲ - ج - ۱۸ =$$

$$۱۸ = ۲ - ج - ۱۸ = (ج + ۱ + ۱) - ج - ۱۸ =$$

نیز ۱۸ = سر اور بموجب دفعہ ۲۱۵ پ ۱ = ۲ سر جم ۱

۲۔ وپ = ۱۸ + پ ۱ - ۲۱۵ = پ ۱ جم واپ

$$= ۱۸ + ۲ سر جم ۱ - ۲۱۵ سر جم ۱ (ج - ب)$$

$$= ۱۸ + ۲ سر جم ۱ [جم ۱ - (ج - ب)]$$

$$= ۱۸ - ۲ سر جم ۱ [جم (ب + ج) + جم (ج - ب)] دفعہ ۱$$

$$= ۱۸ - ۲ سر جم ۱ جم ب جم ج$$

۳۔ وپ = ۱۸ - ۱۸ جم ۱ جم ب جم ج

۲۲۳۔ مثلث کے بیرونی اور اندرونی دائروں کے مرکز کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ بیرونی دائرہ کا

مرکز ہے اور وہ ضلع

۱ ب پر عمود ہے

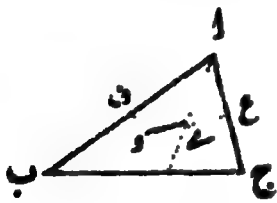
نیز فرض کرو کہ

اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ضلع ۱ ج پر عمود ہے

تب بموجب دفعہ سابق

$$۱۸ - ۱۸ = ج$$

۱۔ ۱۸ = ۱۸ - ۱۸



$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (ج - ۹۰) - \frac{1}{4} = \frac{ج + ۱}{4} - ج + \frac{1}{4}$$

$$\frac{ج - ۱}{4} =$$

$$\text{نیز اے} = \frac{۲}{ج} = \frac{۱}{ج} = \frac{۱}{ج} = ۳ \text{ جب } \frac{۱}{ج} \text{ جب } \frac{۱}{ج}$$

..... (صفحہ ۲۱۰ نتیجہ صریح)

$$\therefore \text{وئے} = ۱ + ۱ = ۲ \text{ و } ۱ \times ۱ = ۱ \text{ جم و } ۱ =$$

$$= ۱۶ + ۱۶ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴}$$

$$- ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جم } \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}$$

$$\therefore \text{وئے} = ۱ + ۱۶ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴}$$

$$- ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جم } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴}$$

$$= ۱ - ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جم } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴}$$

$$= ۱ - ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جم } \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

$$= ۱ - ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ (صفحہ ۷۵) } \dots \dots (۱)$$

$$\therefore \text{وئے} = ۱ - ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{۱}{۴}$$

نیز ربط (۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\text{وئے} = \text{س} - \text{س} = ۲ \times \text{س} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4}$$

(دفعہ ۲۱۰ نتیجہ صریح) $\text{س} - \text{س} = ۲$
 نا طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر زاویہ کے مقابل
 لے جا بنی دائرہ کا مرکز ہے جو تو

$$\text{وئے} = \text{س} + \text{س} = ۱ + ۱ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4}$$

اس لئے وئے = $\text{س} + ۲ \text{ س}$ (دفعہ ۲۱۳، نتیجہ صریح)
 بطرز دیگر۔ فرض کرو کہ اگر وئے کو دونوں طرف خارج کیا جائے
 وہ مثلث کے بیرونی دائرہ کو نقاط س اور ط پر قطع کرتا ہے اور خط
 وئے دائرہ کو نقطہ ہ پر ملتا ہے۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۳۵

$$\text{س} \times \text{س} = \text{ط} = \text{وئے} \times \text{وئے} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{ن} \text{ س} \times \text{س} = \text{ط} = (\text{س} + \text{وئے})(\text{س} - \text{وئے})$$

$$= \text{س}^2 - \text{وئے}^2$$

$$\text{ن} \text{ د} \text{ وئے} \text{ ج} = \text{د} \text{ وئے} \text{ ج} + \text{وئے} \text{ د} \text{ وئے} \text{ ج}$$

$$= \text{د} \text{ وئے} \text{ ج} + \text{وئے} \text{ د} \text{ وئے} \text{ ج}$$

$$= \text{د} \text{ وئے} \text{ ج} + \text{وئے} \text{ د} \text{ وئے} \text{ ج}$$

$$= \text{د} \text{ وئے} \text{ ج}$$

$$\text{وئے} = \text{س} = ۲ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ (دفعہ ۲۰۶)}$$

نیز $\frac{اے}{بے} = \frac{عے}{جے} = \frac{رے}{سے}$ جب $\frac{اے}{بے}$ جب $\frac{عے}{جے}$ جب $\frac{رے}{سے}$
(۲) میں یہ قیمتیں مندرجہ کرنے سے

رے - وے = ۳ سار

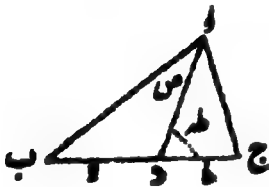
یعنی وے = رے - ۲ سار

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $ہے = دے = ۲ سار$

اس لئے $ہے = دے = رے = ۲ سار$

یعنی $ہے + دے + رے = ۲ سار + ۲ سار + ۲ سار$

۲۲۳- زاویوں کے منصف



اگر $\angle A$ زاویہ A کی تنصیف کرے اور قاعدہ کو دو حصوں میں تقسیم کرے جنکے طول لا اور ما ہوں تو

بموجب اقلیدس م ۶ ش ۳

$$\frac{لا}{اے} = \frac{اب}{اے} = \frac{جے}{بے}$$

$$\frac{لا}{اے} = \frac{اب}{اے} = \frac{جے}{بے} = \frac{لا + اے}{اے + بے} = \frac{لا + اے}{جے + بے} = \frac{لا + اے}{جے + بے} \dots (۱)$$

جس سے لا اور ما کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نیز اگر $\angle A$ ضلع $بج$ سے زاویہ طہ بنائے اور اس کا

طول میں ہو تو

$$\Delta \text{ ا ب د} + \Delta \text{ ا ج د} = \Delta \text{ ا ب ج}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ ج ص} = \text{جب} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ ب ص} = \text{جب} \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ب ج} = \text{ج ب ا}$$

$$\text{یعنی ص} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب + ج}} \times \frac{\text{ج ب ا}}{\text{ج ب ا}}$$

$$= \frac{2 \text{ ب ج}}{\text{ب + ج}} \text{ ج ب ا} = \frac{1}{4} \text{ ج ب ا} \dots \dots \dots (۲)$$

نیز ط = $\Delta \text{ د ا ب} + \text{ب} = \frac{1}{4} \text{ ب} + \text{ب} \dots \dots \dots (۳)$
اس طرح سے ہمیں منصف کا طول اور ب ج سے اس کا میلان حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۷

اگر ایک مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز سے ہو اور زمین جانی
دائروں کے مرکز سے ہے، ہے ہے ہوں تو ثابت کر دو کہ

- ۱۔ اے = رقم $\frac{1}{4}$
- ۲۔ اے اے بے بے ج = اے ج = اے ب ج = مس $\frac{1}{4}$ مس $\frac{1}{4}$ مس $\frac{1}{4}$ ج
- ۳۔ اے بے = رقم $\frac{1}{4}$ ۴۔ اے بے = اے ج = اے ب ج
- ۵۔ اے بے = اے ج = اے ب ج
- ۶۔ اے بے = اے ج = اے ب ج = ۱۶ سار
- ۷۔ اے بے = اے ج = اے ب ج = ۲۴ (پ + پ)

۱۔ مثلث Δ و Δ و Δ بنے تو ثابت کرو کہ

(۱) اس کے اضلاع ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴ ہیں

(۲) اس کے زاوئے $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ہیں

(۳) اس کا رقبہ ۲۴ مربع ہے

۲۔ جن نقطوں پر مثلث Δ ب ج کا دائرہ افرونی اضلاع کو
س کرتا ہے ان کو ملانے سے ایک اور مثلث دہن جتا ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس مثلث کے اضلاع ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲ ہیں

(۲) اس کے زاوئے $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ہیں

(۳) اس کا رقبہ $\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{2}$ مربع ہے

۳۔ مثلث Δ ب ج کے اضلاع کے نقاط منصف د'ع' ف' ہیں ثابت کرو کہ
مثلث د'ع' ف' اور مثلث Δ ب ج کے ہندسی مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے
ہیں نیز ثابت کرو کہ مثلث د'ع' ف' کا مرکز عمودی Δ ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے
کسی مثلث Δ ب ج میں ثابت کرو کہ -

۱۔ اگر زاویہ Δ سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو وہ اس
ج کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو اسکے متصل زاویوں کے ماسات اتمام
ہے مناسب ہوتے ہیں اور زاویہ Δ کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے
کی جو ب اتمام اضلاع متصلہ کے بالعکس مناسب ہوتی ہیں -

۲۔ زاویہ Δ میں سے گزرنے والا وسطانیہ اس کو دو ایسے زاویوں میں تقسیم
ہے جن کے ماس اتمام ۲ مم Δ + مم ج اور ۲ مم Δ + مم ب ہیں اور مثلث کے
دہ سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس اتمام $\frac{1}{2}$ (مم ج + مم ب) ہے -

۲۴۔ اگر زاویہ α سے مقابل کے ضلع BC پر عمود نکالا جائے تو پانچ
عمود اور BC کے نقطہ تنصیف کا باہمی حاصل $\frac{1}{2}BC$ ہے۔

۲۵۔ مثلث ABC کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ مثلثات

BOC ، COA ، AOB اور ABC کے بیرونی دائرے سب برابر ہیں۔

۲۶۔ مثلث ABC کے رئوس الزوایا سے مقابل کے اضلاع پر عمود

AD ، BE اور CF کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات DEF ، ABC

ABC کے بیرونی دائروں کے قطر بالترتیب AM ، BN اور CP ہیں اور

ہیں اور مثلث DEF اور ABC کے اضلاع کے مجموعوں کی باہمی نسبت $1:2$ ہے

۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز سے رئوس الزوایا

کے حاصلوں کا حاصل ضرب 4 مرکز ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلث ABC کے تین جانبی دائروں کے گرد ایک، مثلث

DEF بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{EF}{a} = \frac{FD}{b} = \frac{DE}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)$$

۲۹۔ اگر ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ایک مثلث کے اندرونی اور

بیرونی دائروں کو مس کرے، نیز ضلع BC کو خارجاً مس کرے تو ثابت

کرو کہ اس کا نصف قطر $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)$

۳۰۔ اگر تین ایسے دائروں کے نصف قطر جو ایک دوسرے کو خارجاً

مس کریں، OA ، OB ، OC ہوں اور اگر ان میںوں کو مس کرتے ہوئے دو اور

دائرے کھینچے جائیں جن کے نصف قطر r اور r' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

نقطہ تماس سے $\left(\frac{اب ج}{ج + ب + ا} \right)^{\frac{1}{2}}$ ہے

۳۷۔ اضلاع ب ج، ج ا، اب میں عین نقطہ ا، ب، ج ایسے متوازی کئے گئے ہیں کہ

ب ا : ج ج : ج ب : ب ا = ج : ج : ج ب = م : ن، ثابت کرو کہ
خطوط ا ب، ب ج، ج ا کے باہمی تقاطع سے ایک ایسا مثلث پیدا ہوگا
جس کے رقبہ کی نسبت مثلث اب ج کے ساتھ (م-ن) : (م+م+ن) + ن
ہوگی۔

۳۸۔ مثلث اب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، اب
کو نقاط ا، ب، ج پر بالترتیب مس کرتا ہے، اسی طرح سے مثلث
ا، ب، ج کا دائرہ اندرونی اضلاع کو نقاط ا، ب، ج پر مس کرتا ہے اور
علیٰ هذا القیاس اگر ن داں مثلث ا ب ج اس طرح سے پیدا ہو تو
ثابت کرو کہ اس کے زاوے

$$\frac{\pi}{3} + (-2)^n \left(\frac{\pi}{3} - 1 \right) + \frac{\pi}{3} + (-2)^n (ب - \frac{\pi}{3})$$

$$\text{اور } \frac{\pi}{3} + (-2)^n \left(\frac{\pi}{3} - ج \right) \text{ ہیں}$$

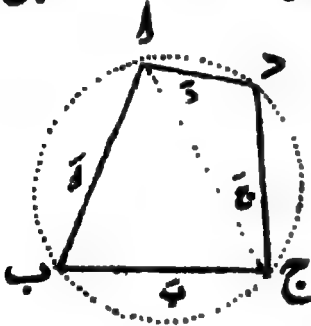
اس لئے ثابت کرو کہ آخر الامر اس طرح سے جو مثلث بنے گا وہ متساوی الاضلاع
ہوگا۔

۳۹۔ مثلث اب ج کا مثلث بائیں ا ب ج ہے اور ا ب ج کا مثلث پائیں
ا ب ج ہے اور علیٰ هذا القیاس ن دیں مثلث پائیں کے زاوے
ا، ب، ج دریافت کرو۔

باب شانزوم

اشکال ذواربعۃ الاضلاع اور منتظم کثیر الاضلاع

۲۲۵ - ایک ذواربعۃ الاضلاع دائرہ کے اندر بن سکتی



ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع

ا ب ج د ہے اور اس کے

اضلاع کے طول ا ب، ب ج، ج د،

شکل میں دکھلانے کئے ہیں۔

ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ = رقبہ ا ب ج + رقبہ ا د ج

$$= \frac{1}{2} \text{ ا ب جب ب } + \frac{1}{2} \text{ ج د جب د } \quad (\text{دفعہ ۲۰۴})$$

$$= \frac{1}{2} (\text{ا ب} + \text{ج د}) \text{ جب ب}$$

اور چونکہ اقلیدس م ۳ ش ۲۲ کی رو سے ا ب = ا د

اس لئے جب ب = جب د

اب ہمیں جب ب کو اضلاع کی رقوم میں بیان کرنا ہے

$$\text{ا ب} + \text{ب ج} = ۲ - \text{ا ب جب ب} = \text{ا ج}$$

$$= \text{ج} + \text{ک} - ۲ \text{ج} - ۵ \text{جم}$$

لیکن جم د = جم (۱۸۰ - ب) = جم ب
اس لئے آ + ب - ۲ آ + ب جم ب = ج + ک + ۲ ج - ۵ جم ب

$$\text{یعنی جم ب} = \frac{\text{آ} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک}}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

$$\text{اس لئے جب آ ب} = ۱ - \text{جم ب} = ۱ - \frac{(\text{آ} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک})}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

$$= \frac{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج}) - (\text{آ} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک})}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

$$= \frac{\{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج}) + (\text{آ} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک})\}}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

$$= \frac{\{(\text{آ} + ۲ \text{ب} - \text{ج}) - (\text{ج} - ۲ \text{آ} + ۵ \text{ج} + \text{ک})\}}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

$$= \frac{\{(\text{آ} + \text{ب}) - (\text{ج} - ۵ \text{آ})\}}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

$$= \frac{\{(\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج}) - (\text{ج} - ۵ \text{آ})\}}{۲ (\text{آ} + \text{ب} + ۵ \text{ج})}$$

فرض کرو کہ آ + ب + ج + ۵ = ۲ ن

$$\text{یعنی آ + ب + ج} = ۵ - ۲ = ۵ - ۲ = ۳$$

$$۱ + \text{ب} - \text{ج} = ۵ - ۲ = ۳$$

$$۱ - \text{ب} + \text{ج} = ۵ - ۲ = ۳$$

اور - $1 + ب + ج + د = 2 (ن - 1)$

$$\frac{2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1)}{2 (1 + ب + ج + د)^2}$$

یعنی $(1 + ب + ج + د)$ جب $2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1)$ لہذا ذواربعتہ الاصلیٰ کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} (1 + ب + ج + د) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1) \times 2 (ن - 1)$$

$$224 - \text{چونکہ حجم ب} = \frac{1 + ب + ج + د - 2}{2 (1 + ب + ج + د)}$$

اس لئے $1 + ب + ج + د - 2$ حجم ب

$$= \frac{1 + ب + ج + د - 2}{2 (1 + ب + ج + د)}$$

$$= \frac{(1 + ب + ج + د - 2) \times 2 (1 + ب + ج + د)}{2 (1 + ب + ج + د)}$$

$$= \frac{(1 + ب + ج + د - 2) \times 2 (1 + ب + ج + د)}{2 (1 + ب + ج + د)}$$

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$ب = \frac{(1 + ب + ج + د - 2) \times 2 (1 + ب + ج + د)}{2 (1 + ب + ج + د)}$$

اس سے ہمیں ذواربعتہ الاصلیٰ کے قطروں کے طول معلوم ہوتے ہیں۔

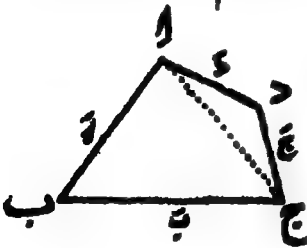
ضرب دینے سے $ا ج \times ب د = (ا ج + ب د)$
 یعنی $ا ج \times ب د = ا ب \times ج د + ب ج \times د د$
 اور یہ اقلیدس م ۶ مسئلہ دے
 نیز ذواربہ الاصلع کے بیرونی دائرے کا مرکز

$$\frac{ا ج}{ب د} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)}{ا ب \times ج د} = \frac{(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)}{ا ب \times ج د}$$

$$\frac{(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)}{(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)} = \frac{(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)}{(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)(ا ج + ب د)}$$

۲۲۷۔ اگر کوئی ذواربہ الاصلع دی ہوئی ہو اور یہ ضروری نہیں کہ وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو ہم اس کے رقبہ کو اصلع اور دو مقابل کے زاویوں کے مجموعہ کی رقم میں بیان کر سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ دو زاویوں میں سے ایک اور دوسرے مجموعہ ۲۷۰ ہے، اگر ذواربہ الاصلع کے رقبہ کو قہ سے تعبیر کریں تو

$$قہ = رقبہ مثلث ا ب ج + رقبہ مثلث ا ج د$$

$$= \frac{۱}{۲} ا ب \times ج د + \frac{۱}{۲} ا ج \times ج د$$

یعنی ۴ قہ = ۲ اُت جب ب + ۲ ج د جب د (۱)

نیز ۲ اُت + ۲ ب - ۲ اُت جب ب = ۲ ج + ۲ - ۲ ج د جب د

پس ۲ اُت + ۲ ب - ۲ ج - ۲ = ۲ اُت جب ب - ۲ ج د جب د (۲)

(۱) اور (۲) کو مربع کرنے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔

۱۶ قہ + (۲ اُت + ۲ ب - ۲ ج - ۲)

= ۴ اُت + ۴ ب + ۴ ج - ۴ اُت جب د - ۴ ج ب جب د - ۴ ج ب جب د

= ۴ اُت + ۴ ب + ۴ ج - ۴ اُت جب د - ۴ ج ب جب د (ب + د)

= ۴ اُت + ۴ ب + ۴ ج - ۴ اُت جب د - ۴ ج ب جب د

= ۴ اُت + ۴ ب + ۴ ج - ۴ اُت جب د - ۴ ج ب جب د (۲ ج ب - ۱)

= ۴ اُت + ۴ ب + ۴ ج - ۴ اُت جب د - ۴ ج ب جب د

یعنی ۱۶ قہ = ۴ اُت + ۴ ب + ۴ ج - ۴ اُت جب د - ۴ ج ب جب د

- ۱۶ اُت جب د - ۴ ج ب جب د (۳)

لیکن بموجب دفعہ ۲۲۵

۴ اُت + ۴ ج - ۴ اُت - (۲ اُت + ۲ ب - ۲ ج - ۲)

= ۲ (ن - اُت) - ۲ (ن - ب) + ۲ (ن - ج) - ۲ (ن - د)

= ۱۶ (ن - اُت) - ۱۶ (ن - ب) + ۱۶ (ن - ج) - ۱۶ (ن - د)

لہذا مساوات (۳) سے

قہ = ۲ (ن - اُت) - ۲ (ن - ب) + ۲ (ن - ج) - ۲ (ن - د)

جس سے رقبہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱ - اگر د صفر ہو تو شکل ذواریبہ الاصلیٰ مثلث

بن جائے گی اور ضابطہ مندرجہ بالا سے ضابطہ دفعہ ۲۰۴ حاصل

ہوگا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ذو اربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع معلوم ہوں تو Δ ب ج د کی قیمتیں اور اسلئے Δ کی قیمت معلوم ہو جائے گی رقبہ قد کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت ہوگی جبکہ Δ ب ج د Δ ج د ا کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو یعنی جبکہ Δ ج د ا صفر کے برابر ہو اور اس وقت $\Delta = 90^\circ$ اس صورت میں شکل کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوگا اور شکل ایک دائرہ کے اندر بن سکے گی۔ (اقلیدس م ۳ ش ۲۲) اس سے معلوم ہوا کہ جس ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع دئے ہوئے ہوں اس کے رقبہ کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت ہوگی جب وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے۔

۲۲۸۔ مثال۔ ایک ایسی ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ دریافت کرو جس کے اندر ایک دائرہ بن سکے۔

فرض کرو کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع Δ ب ج د کے اندر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ اضلاع Δ ب ج د، Δ ج د ا اور Δ ا ک و ف، Δ ق ر کس پر مس کرتا ہے۔ تب

$$\Delta ف = \Delta ا س، \Delta ب ف = \Delta ب ق، \Delta ج ق = \Delta ج ر اور \Delta ر = \Delta د س$$

$$\Delta ف + \Delta ب ف + \Delta ج ر + \Delta ر = \Delta ا س + \Delta ب ق + \Delta ج ق + \Delta د س$$

$$\text{یعنی } \Delta ا ب + \Delta ج د = \Delta ب ج + \Delta د ا$$

$$\text{یعنی } \Delta ا ج = \Delta ب د + \Delta د$$

$$\text{اسلئے } \Delta = \frac{\Delta ا ج + \Delta ب د + \Delta د}{2} = \Delta ا ج + \Delta ب د + \Delta د$$

ن - ۴ = ج - ن - ب = د - ن - ج = ۱ اور ن - ۵ = ب

اس لئے مضابطہ دفعہ آخر سے اس صورت میں ہوگا

قد = ا ب ج د - ا ب ج د ج م ع = ا ب ج د جب ع

یعنی رقبہ مطلوبہ = م ا ب ج د جب ع

اگر علاوہ اس کے ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو

۲ ع = ۸۰ یعنی جب ع = جب ۹۰ = ۱

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ ایک ایسی ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے

اندز ایک دائرہ اور باہر ایک دائرہ بن سکے = م ا ب ج د

مثله نمبری ۳۸

۱ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکتا ہے جو

اضلاع کو مس کرے، اگر اس کے اضلاع مفصل ذیل ہوں تو ہر ایک

صورت میں اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) ۳، ۵، ۷، ۹ فٹ

(۲) ۷، ۱۰، ۵، ۲ فٹ

۲ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶

فٹ ہیں اور اس کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۱۲۰ ہے ثابت

کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ۳ ما ۳ مربع فٹ ہے

۳ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع ۳، ۳، ۴، ۴ اور ۴ اور

۴ فٹ ہیں اور اس کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے، اس کے اندر

اور بیرونی دائروں کے نصف قطر دریافت کرو۔

۴- ثابت کرو کہ کسی ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ اس کے دو قطرہن

اور اُن کے درمیانی زاویہ کی جیب کے نصف حاصل ضرب کے برابر ہے

۵- ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے نیزہ

ایک اور دائرہ کے گرد بھی بن سکتی ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

۱) $\frac{1}{2} \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$ ہے۔

۶- ایک ذواربعۃ الاضلاع ۱) $\text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$ ایک دائرہ کے گرد بنائی

گئی ہے ثابت کرو کہ

$$\text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) = \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$$

۷- ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ۱) $\text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$

ہیں اور قطرہن کا درمیانی زاویہ جو ضلع ۱) کے مقابل ہے وہ ۱) ہے

ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ۱) $\frac{1}{2} \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$ ہے۔

۸- ایک ذواربعۃ الاضلاع کے قطرہ اور ۱) ہیں اور اس کے اضلاع

۱) $\text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$ ہیں، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

$$\frac{1}{2} \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$$

۹- اگر کسی ذواربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کرو

کہ اس کے قطرہن کا درمیانی زاویہ

$$\text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) = \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle) \times \text{جیب}(\angle)$$

اگر اس ذواربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکے جو اس کے اضلاع

کرے تو ثابت کر دو کہ زاویہ مذکورہ جم $\frac{ن + ج - ب}{ن + ج + ب}$ ہوگا

۔ اگر ایک ذواربہ الاضلاع کے اضلاع کو بالترتیب نسبت م : ن تقسیم کیا جائے اور نقاط فصل کو وصل کرنے سے ایک نئی ذواربہ اضلاع بنائی جائے تو ثابت کر دو کہ اس کے رقبہ کی نسبت اصلی ذواربہ اضلاع کے رقبہ کے ساتھ $م^2 : ن^2 = (م + ن) : (ن + ج)$ ہوگی

اگر ذواربہ الاضلاع اب ج د کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت

$$\frac{(ن - د)(ن - ب)}{(ن - ج)(ن - د)} = \frac{م}{ن}$$

ن دو حصوں میں ایک قطر دوسرے قطر کو تقسیم کرتا ہے ایسا حاصل

$$\frac{ن + ج - ب}{ن + ج + ب} = \frac{(ن - د)(ن - ب)}{(ن - ج)(ن - د)}$$

۔ اگر ایک ذواربہ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب 'ا' 'ب' 'ج' 'د' تو ثابت کر دو کہ

$ا + ب + ج - د = ۲$ و $ب + ج - ا = ۲$ و $ج + د - ب = ۲$ و $د + ا - ج = ۲$ کے

نی زاویوں کو تعبیر کرتے ہیں

۲۔ منتظم کثیر الاضلاع - منتظم کثیر الاضلاع ایک کثیر الاضلاع ہے جس کے سب اضلاع برابر ہوں

ب زاوئے برابر ہوں -

اب کثیر الاضلاع کے ن زاوئے ہوں تو

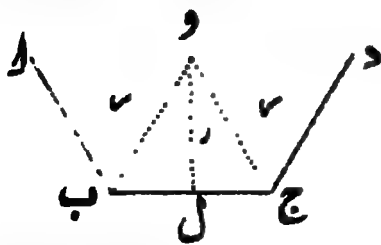
بموجب اقلیدس م ۱۳۲، نتیجہ صریح

اس کے ایک زاویے کا ن گنا + ۲ قائے
= ان قائموں کی تعداد کے جو شکل کی تعداد اضلاع کے دو چند
ہوں = ۲ ن قائے

اس لئے ہر ایک زاویہ = $\frac{۲-۲ن}{ن}$ قائے

$$= \frac{۲-۲ن}{ن} \times \frac{۲}{۲} = \text{نیم قطری زاویے}$$

نوٹ۔ شکل مستقیم الاضلاع کو کسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی کہتے ہیں جب اسکے
سب زاویے دائرہ کے محیط پر واقع ہوں۔ کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع
کے گرد بنا ہوا اُس وقت کہتے ہیں جب اُس دائرہ کا محیط اُس شکل کے
سب زاویوں کے نقاط میں سے ہو کر گزرے، اس دائرہ کو شکل کا بیرونی
دائرہ بھی کہتے ہیں۔ کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع کے اندر بنا ہوا
کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کے محیط کو مس کرے، اس کو
ہم شکل کا اندرونی دائرہ بھی کہیں گے، کسی شکل مستقیم الاضلاع کو دائرہ
کے گرد بنی ہوئی اُس وقت کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کا مماس
۲۳۰۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں
کے نصف قطر دریافت کرو۔



فرض کرو کہ اب، ب ج،
ج د ایک کثیر الاضلاع کے
تین متصل اضلاع ہیں، اور کل

تعداد اضلاع ن ہے، زاویوں اب ج اور ب ج د کی تصنیف

خطوط ب و اور ج و سے کرو اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ و پر ملتے ہیں، ضلع ب ج پر عمود ول نکالو، ظاہر ہے کہ نقطہ و کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کا مرکز ہے اور ب ل = ج

اس لئے و ب = و ج = س یعنی بیرونی دائرہ کا نصف قطر اور ول = ر یعنی اندرونی دائرہ کا نصف قطر

زاویہ ب و ج اُن تمام زاویوں کے مجموعہ کا $\frac{1}{n}$ واں حصہ ہے جو اضلاع کے محاذی نقطہ و پر بنتے ہیں۔

یعنی $\angle ب و ج = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ نیم قطری زاوے

اس لئے $\angle ب و ل = \frac{\pi}{n}$ $\angle ب و ج = \frac{2\pi}{n}$

اگر کثیر الاضلاع کے ضلع کو l سے تعبیر کریں تو

$$1 = ب ج = 2 = ب ل = 2 = راجب ب و ل = 2 = راجب \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore س = \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \cos \frac{\pi}{n} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{نیز } 1 = 2 = ب ل = 2 = ول = س ب و ل = 2 = ر س \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore ر = \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \sin \frac{\pi}{n} \dots \dots \dots (2)$$

۳۳۳۔ منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ

کثیر الاضلاع کا رقبہ مثلث ب و ج کے رقبہ کا n گنا ہے

اس لئے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$$= \text{ن} \times \frac{1}{2} \times \text{ول} \times \text{ب ج} = \text{ن} \times \text{ول} \times \text{ب ل}$$

$$= \text{ن} \times \text{ب ل} \times \text{م ل} \times \text{و ب} \times \text{ب ل}$$

$$= \text{ن} \times \frac{1}{2} \times \text{م ل} \times \frac{1}{2} \times \text{م ل} \times \text{و ب} \times \text{ب ل} \dots \dots \dots (۱)$$

جس سے اضلاع کی رقوم میں کثیر الاضلاع کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{نیز رقبہ} = \text{ن} \times \text{ول} \times \text{ب ل} = \text{ن} \times \text{ول} \times \text{ول} \times \text{س ب} \times \text{ول}$$

$$= \text{ن} \times \text{س ب} \times \frac{1}{2} \times \text{ول} \times \text{ول} \dots \dots \dots (۲)$$

نیز رقبہ

$$= \text{ن} \times \text{ول} \times \text{ب ل} = \text{ن} \times \text{و ب} \times \text{م ل} \times \text{و ب} \times \text{ب ل} \times \text{و ب}$$

$$= \text{ن} \times \text{م ل} \times \frac{1}{2} \times \text{و ب} \times \frac{1}{2} \times \text{و ب} \times \text{م ل} \times \text{و ب} \times \text{ب ل} \dots \dots \dots (۳)$$

صوابط (۲) اور (۳) سے کثیر الاضلاع کا رقبہ اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے

۲۳۲۔ مثال۔ ایک منظم معشر کے ضلع کا طول ۲۰ فٹ ہے

ہدایت کرو (۱) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر (۲) اس کے بیرونی

دائرہ کا نصف قطر (۳) اس کا رقبہ

$$\text{کثیر الاضلاع کے مرکز پر ایک ضلع کے محاذی زاویہ} = \frac{90}{12} = 7.5^\circ$$

$$\text{اس لئے } 10 = \text{ر م س} = 15 = \text{س ج ب} = 15$$

$$\therefore 10 = \text{ر م} = 10 = \frac{10}{360} \times (10 \times 10) \times 10$$

$$= 10 \times (10 + 10) = 200 \dots \dots \dots \text{۳۲ و ۳۷ فٹ}$$

$$\text{نیز } \frac{۲۲}{۱-۳۲} \times ۱۰ = \frac{۱۰}{۹۵} = \text{س} \quad (\text{دفعہ ۱۱۲})$$

$$(۲۲+۹۲) ۱۰ = (۱+۳۲) ۲۲ \times ۱۰ =$$

$$۱۰ = (۱۵۴۲۲ + ۲۵۴۲۹۵)$$

$$\text{نیز رقبہ } = ۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰ \text{ مربع فٹ}$$

$$۱۲۰۰ = (۳۲+۲) ۱۲۰۰ = ۲۴۷۸۵۴۶ \text{ مربع فٹ}$$

امثلہ نمبری ۳۹

۱۔ ایک معشر منتظم ایک ایسے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطرافٹ ہے، اس کے مجموعہ اضلاع کو ۱۔ و ایچ تک صحیح طور پر دریافت کرو۔

$$[۳۲۲۹۲ = ۱۸ \text{ مس}]$$

۲۔ ایک ۱۲ اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطرافٹ ہے اس کے ایک ضلع کا طول ۳ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۳۔ اشکال ذیل کا رقبہ دریافت کرو (۱) مخمس (۲) مسدس (۳) مخمس (۴) معشر (۵) اثنا عشری، ان میں سے ہر ایک شکل منتظم ہے اور ہر ایک کا ضلع ۱ فٹ ہے۔

$$[۳۴ = ۱۸ \text{ مس}، ۳۵ = ۳۶ \text{ مس}، ۳۷ = ۳۸ \text{ مس}]$$

۴۔ ایک مخمس منتظم اور مسدس منتظم کے رقبوں کا تفاوت معلوم کرو ہر ایک شکل کا مجموعہ اضلاع ۲۴ فٹ ہے۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ فٹ ہے، اس کے کونوں کو کاٹ کر ایک

منتظم مشمن بنائی گئی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۶۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کے اندر اور باہر دو مشمن شکلیں بنائی گئی ہیں، ان کے اضلاع کے مجموعوں اور ان کے رقبوں کا مقابلہ کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر بنی ہوئی سدس اور مشمن شکلوں کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲۷۷:۳۲۲$ ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک ایسے دائرہ کا نصف قطر جو ایک منتظم محض کے گرد بن سکتا ہے محض کے ایک ضلع کا $\frac{1}{11}$ ہے۔

۸۔ اگر ایک مثلث متساوی الاضلاع اور منتظم سدس کے اضلاع کے مجموعے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲:۳۷$ ہے۔

۹۔ اگر ایک منتظم محض اور ایک منتظم سدس کے اضلاع کے مجموعے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲:۲۵$ ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ $\frac{1}{4}$ کم $\frac{11}{12}$ ہے جہاں کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو تعبیر کرتا ہے،

۱۱۔ ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع ہیں، ان میں سے ایک تو ایک دئے ہوئے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے اور دوسری دائرہ کے اندر ثابت کرو کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے مجموعہ اضلاع اور دائرہ کے محیط اور اندرونی کثیر الاضلاع کے مجموعہ اضلاع کی باہمی نسبتیں

قط $\frac{11}{12} : \frac{11}{12}$ کم $\frac{11}{12}$: ان میں اور اشکال کے رقبوں کی باہمی نسبت $\frac{11}{12} : ۱$ ہے۔

۱۲- ایک n اضلاع کی کثیرالاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، اگر اس کے رقبے کی نسبت ایک $۲n$ اضلاع کی کثیرالاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اسی دائرہ کے گرد بنائی جائے $۲:۳$ ہو تو n کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳- ثابت کرو کہ $۲n$ اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو n اضلاع کی منتظم اشکال کثیرالاضلاع کے رقبوں کا وسط تناسب ہے جو با ترتیب دائرہ کے اندر اور گرد بنی ہوئی ہوں۔

۱۴- n اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیرالاضلاع میں سے ایک دائرہ کے اندر اور دوسری دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $۴:۳$ ہے، n کی قیمت دریافت کرو۔

۱۵- ایک کثیرالاضلاع کے اندر دو زاوے سلسلہ حساب میں ہیں، سب سے چھوٹا زاویہ ۱۲۰ ہے اور فرق مشترک ۵ ہے، اضلاع کی تعداد دریافت کرو۔

۱۶- دو منتظم اشکال کثیرالاضلاع میں سے ایک کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دو چند ہے، اور ایک کے زاوے کو دوسری کے زاوے کے ساتھ نسبت $۸:۹$ ہے، ہر ایک کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۷- ثابت کرو کہ منتظم اشکال کثیرالاضلاع کے کل ۱۱ زوج ایسے ہو سکتے ہیں کہ ہر ایک زوج میں ایک کثیرالاضلاع کے زاوے کے درجوں کی تعداد کو دوسری کثیرالاضلاع کے زاویہ کی درجوں کی تعداد

کے ساتھ نسبت ۱۰ اور ۹ کی ہو، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک مربع مینار کے قاعدہ کا ضلع $\sqrt{2}$ فٹ ہے اور اس کے رخ کی عمودی بلندی قاعدہ کے مرکز سے $\sqrt{2}$ فٹ ہے، اگر مینار کے کسی رخ کا میلان قاعدہ کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ ہو اور دو رخوں کا میلان آپس میں $\frac{\pi}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \text{ اور مس فہ} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{2}}}$$

۱۹۔ ایک مینار کا قاعدہ منتظم سدس کی شکل کا ہے، اگر مینار کے رخ سے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو وہ سدس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کا طول قاعدہ کے ایک ضلع کے برابر ہے، قاعدہ اور مینار کے کسی رخ کے درمیان جو زاویہ بنے اس کا حماس دریافت کرو۔ نیز دو بیرونی رخوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کا حماس معلوم کرو۔

۲۰۔ ایک منتظم مضلع مخروط کا قاعدہ ایک ن اضلاع کی کثیر الاضلاع ہے جس کا ہر ایک ضلع $\sqrt{2}$ ہے، نیز مخروط کے ہر ایک ترچھے ضلع کا طول $\sqrt{2}$ ہے، ثابت کرو کہ مخروط کے دو متصل بیرونی رخوں کا درمیانی زاویہ

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



باب ہفتم

معجزہ ایوں کی مثلتی نسبتیں۔ دائرہ کا رقبہ۔ اُفق کا میلان

۲۳۳۔ ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے، اُس میں نیچر کا زاویوں کی تعداد طہ ہے ثبات کرو کہ جب طہ، طہ، مس طہ لحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں۔

فرض کرو کہ موع

کوئی زاویہ ہے جو

زاویہ قائم سے کم ہے،

مرکز و اور سکی

نصف قطر و ع پر دائرہ

کی توسع اور تنہی جو دم کو نقطہ ۱ پر ملے۔

وہ پر غم و غم کھینچو اور اس کو اس قدر غم کرو کہ

وہ قوس دائرہ کو 'ع' پر لے، نقطہ 'ع' پر ماس عم کیچھو

اور فرض کرو کہ وہ $و$ کو نقطہ $م$ پر ملتا ہے، $م$ ع کو $ط$ مثلث $ع$ و $ن$ اور $ع$ و $ن$ آپس میں ہر طرح سے برابر ہیں اس لئے $ع$ ن = $ن$ ع اور قوس $ع$ ن = قوس $ن$ ع نیز مثلث $م$ و $ع$ اور $م$ و $ع$ ہر طرح سے برابر ہیں

اس لئے $م$ ع = $ع$ م خط مستقیم $ع$ ط و $ط$ ع میں قوس $ع$ ن سے کم ہے

یعنی $ن$ ع > قوس $ع$ ن نیز ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ قوس $ع$ ن ط و $ط$ ع میں $ع$ م اور $م$ ع کے مجموعہ سے کم ہے یعنی قوس $ع$ ن > $ع$ م

پس معلوم ہوا کہ $ن$ ع، قوس $ع$ ن اور $ع$ م اس میں بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب ہے۔

اس لئے $\frac{ن}{ع}$ ، $\frac{قوس\ ن}{ع}$ اور $\frac{ع}{ع}$ میں بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب ہے

لیکن $\frac{ن}{ع} = جب\ ن > ع = جب\ ط$
 $\frac{قوس\ ن}{ع} = \frac{ن}{ع}$ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد کے

= ط (دفعہ ۲۳)

اور $\frac{ع}{ع} = مس\ ع\ و\ م = مس\ ن\ و\ ع = مس\ ط$

لہذا ثابت ہوا کہ جب ط > ط > اور مسط میں بلحاظ مقدار کے ترتیب صعودی ہے بشرطیکہ ط > ط
 ۲۳۴ — چونکہ جب ط > ط > مسط اس لئے
 اگر ان میں سے ہر ایک کو مثبت مقدار جب ط پر تقسیم
 کر دیا جائے تو

۱ > جب ط > جم ط
 اسلئے جب ط ہمیشہ ۱ اور ۱ کے درمیان واقع
 ہوتی ہے اور یہ نتیجہ درست ہے خواہ زاویہ ط کتنا ہی
 چھوٹا کیوں نہ ہو۔

لیکن جب زاویہ ط بہت چھوٹا ہو تو جم ط تقریباً ایک
 کے برابر ہوتی ہے اور جتنا چھوٹا ط ہوتا جائے گا اتنا ہی
 ایک کے زیادہ قریب جم ط آتی جائے گی یعنی اتنا ہی
 ایک کے زیادہ قریب جم ط کی قیمت ہوگی۔

اسلئے جب زاویہ نہایت ہی قلیل ہوگا تو
 مقدار جب ط عدد ایک اور ایک ایسی مقدار کے درمیان
 واقع ہوگی جس کا تفاوت عدد ایک سے ایک لاکھ قلیل
 مقدار کے برابر ہوگا

دوسرے الفاظ میں جب زاویہ ط لاکھ چھوٹا
 ہوگا تو مقدار جب ط اور اسلئے جب ط آخر الامر ایک
 کے برابر ہوگی، یعنی جتنا چھوٹا ایک زاویہ ہوتا جائے گا
 اتنا ہی اس کی جیب اُن نیم قطری زاویوں کی تعداد کے

برابر ہوتی جائے گی جو زاویہ مجوزہ میں شامل ہیں اختصار
اس کو یوں بیان کرتے ہیں۔

جب $\angle = \angle$ اگر زاویہ \angle بہت چھوٹا ہو
اسی طرح سے $\angle = \angle$ اگر زاویہ \angle بہت چھوٹا ہو
نتیجہ صریح فرض کرو کہ $\angle = \angle$ تو اس سے
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب زاویہ \angle لا انتہا چھوٹا ہو
ن لا انتہا بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے جب $\angle = \angle$ ایک کے برابر ہے اگر ن
لا انتہا بڑا ہو

پس ن جب $\angle = \angle$ عہ اگر ن لا انتہا بڑا ہو
اسی طرح سے ن مس $\angle = \angle$ عہ اگر ن لا انتہا بڑا ہو
۲۳۵۔ دفعہ گذشتہ میں یہ خاص طور پر یاد رکھنا چاہئے
کہ زاویہ مجوزہ میں \angle نیم قطری زاویوں کی تعداد کو
تعبیر کرتا ہے۔

جب \angle کی قیمت اگر عہ نہایت ہی چھوٹا ہو اسطرح
معلوم ہو سکتی ہے

$$\angle = 180^\circ - \angle$$

$$\angle = 180^\circ - \angle$$

∴ جب $\angle = \angle$ جب $\angle = 180^\circ - \angle$ ہو جب نتیجہ
دفعہ آخر۔

۲۳۶ — جردوں سے معلوم ہو گا کہ کسی زاویہ کی جب
اور اس کا قوسی ناپ ۷ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہو
ہیں جب تک کہ زاویہ کی مقدار ۱۸ سے کم رہتی ہے اور
وہ ۵ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جب تک
کہ زاویہ تقریباً ۲ سے کم رہتا ہے۔

۲۳۷ — اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطری
زاویوں کی تعداد طہ ہو تو ثابت کرو کہ جب طہ < طہ — $\frac{طہ}{۲}$ اور
جم طہ < ۱ — $\frac{طہ}{۲}$

بوجب دفعہ ۲۳۳

مس طہ < طہ ∴ جب طہ < طہ جم طہ

اور چونکہ جب طہ = ۲ جب طہ جم طہ

اسلئے جب طہ < طہ جم طہ یعنی طہ < (۱ — جب طہ)

لیکن چونکہ بوجب دفعہ ۲۳۳ جب طہ > طہ

اسلئے ۱ — جب طہ < ۱ — (طہ) یعنی ۱ — $\frac{طہ}{۲}$

∴ جب طہ < طہ (۱ — طہ) یعنی طہ — $\frac{طہ}{۲}$

نیز جم طہ = ۱ — جب طہ

اور چونکہ جب طہ > (طہ)

اسلئے ۱ — جب طہ < ۱ — (طہ) یعنی ۱ — $\frac{طہ}{۲}$

علم مثلث کے حصہ دوم میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ

جب طہ < طہ — $\frac{طہ}{۲}$ اور جم طہ > ۱ — $\frac{طہ}{۲}$ + $\frac{طہ}{۲}$

۲۳۸ — مثال ۱ — جب ۱۰ اور جم ۱۰ کی قیمتیں دریافت کرو

$$\frac{\pi}{4 \times 180} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{\pi}{4 \times 180} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ جب } \frac{\pi}{4 \times 180} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ تقریباً}$$

$$\text{نیز } 1 - 0.25 = 0.75$$

$$[0.75 \dots 8278 \dots] - [0.25 \dots 8278 \dots] = 0.5 \dots 8278 \dots$$

$$1 - 0.5 \dots 8278 \dots = 0.5 \dots 8278 \dots$$

مثال ۲۔ مساوات جب ط = ۵۰۲ میں ط کی تقریبی قیمت دریافت کرو
چونکہ جب ط تقریباً ۱/۴ کے برابر ہے اس لئے ط

تقریباً ۱/۴ کے برابر ہے

اب فرض کرو کہ ط = ۱/۴ + ۵ جہاں ۵ مقدار میں قلیل ہے

$$\therefore 502 = \text{جب } (1/4 + 5) = \text{جب } 1/4 + \text{جب } 5$$

$$= 1/4 + \text{جب } 5$$

چونکہ ۵ بہت چھوٹا ہے اس لئے جب ۵ = ۱ اور جب ۵ = ۵ تقریباً

$$\therefore 1/4 + 5 = 502$$

$$\therefore 502 = 1/4 + 5 = 502 \text{ تقریباً}$$

$$\text{اس لئے ط} = 19 \text{ تقریباً}$$

مشکہ نمبری ۴۰

$$[131831 \dots = \frac{1}{\pi}, 314159265 = \pi]$$

مفصلہ ذیل کی قیمتیں پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

$$1 - \text{جب } 1 \quad 2 - \text{جب } 15 \quad 3 - \text{جب } 1$$

۴۔ جم ۱۵ — ۵۔ قم ۶ — ۶۔ قط ۵

سادات ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

۷۔ جب ط = ۱۰ — ۸۔ جب ط = ۲۸

۹۔ جم (۳۳ + ط) = ۱۴۹ — ۱۰۔ جم ط = ۹۹۹

۱۱۔ ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، یہ معلوم کرو کہ آنکھ سے کتنے فاصلہ پر چاند کے سامنے اس کو رکھا جائے کہ چاند دکھائی دے، چاند کے قطر کے معادی جو زاویہ دیکھنے والے کی آنکھ پر بنتا ہے وہ ۳۰ ہے۔

۱۲۔ ایک شخص خط مستقیم پر ایک دور کی شے کی سیدھ میں جاتا ہے اور دیکھتا ہے کہ زمین نقاط و کباب مابین پر اسکی چوٹی کے زوایاء الارتفاع بالترتیب ۲۶، ۳۶، ۴۶ درجہ میں ثابت کرو کہ اب ۳ ب ج تقریباً

۱۳۔ اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطری زاویوں کی تعداد ط ہو تو ثابت کرو کہ جم ط > ۱ - ط + ط
۱۴۔ اولر کا مسئلہ ثابت کرو یعنی ثابت کرو کہ

جب ط = ط × جم ط × جم ط × جم ط ∞ تک
[جب ط = ۲ جب ط = جم ط = ۲ جب ط = جم ط = جم ط = جم ط]
= ۲ جب ط = جم ط = جم ط = جم ط = جم ط
= ۲ جب ط = جم ط × جم ط = جم ط = جم ط جم ط
ن کو لاتھا بڑا فرض کرنے سے بموجب دفعہ ۲۳۲ نتیجہ صحیح
۲ جب ط = ط

اس لئے دائرہ کا رقبہ = πr^2 = اسکے نصف قطر کے

مرج کا π گنا

۲۴۰۔ قطاع دائرہ کا رقبہ

فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز O ہے اور قطاع دائرہ کی احاطہ کرنیوالی قوس AB ہے، فرض کرو کہ

$\angle AOB = \theta$ نیم قطری زاویوں کے

بحکم اقلیدس M ، N ، P ، دائروں کے قطاع آپس میں وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کی قوسوں کو آپس میں ہے چنانکہ

وہ قائم ہیں

$$\frac{\text{قطاع } AOB \text{ کا رقبہ}}{\text{کل دائرہ کا رقبہ}} = \frac{\text{قوس } AB}{\text{محیط دائرہ}}$$

$$\frac{\theta}{360} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2} =$$

$$\therefore \text{قطاع } AOB \text{ کا رقبہ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

امثلہ نمبری ۴۱

[فرض کرو کہ $\pi = 3.14159.....$ ، $\frac{1}{\pi} = 0.31831.....$ اور

لوگ $\pi = 0.4971$]

۱۔ ایک دائرہ کا محیط 44 فٹ ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۲۔ ایک دائرہ کا قطر 10 فٹ ہے، اس کے ایسے قطاع کا رقبہ

دریافت کرو جس کا زاویہ $\frac{1}{2}\pi$ ہو۔

۳۔ ایک دائرہ کے قطع کا رقبہ ۱۰ مربع فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطع کا زاویہ دریافت کرو

۴۔ ایک قطع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا کل طول ۱۰ فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطع کا رقبہ دریافت کرو

۵۔ ایک کاغذ کا تختہ ۲ میل لمبا اور ۱۰۰۳ اینچ موٹا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں پٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کے نصف قطر کی تقویٰ قیمت دریافت کرو

۶۔ ایک کاغذ کا تختہ ایک میل لمبا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں پٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کا قطر ۶ اینچ ہے، کاغذ کی موٹائی دریافت کرو

۷۔ دو ہم مرکز دائروں کے نصف قطر ۲ اور ۴ ہیں، اندرونی دائرہ کے دو متوازی ٹاس بیرونی دائرہ سے ایک قوس قطع کرتے ہیں، قوس کا طول دریافت کرو

۸۔ ایک نصف دائرہ کا محیط دو ایسی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ایک کا وتر دوسرے کے وتر کا دو چندان ہے، ثابت کرو کہ جو قطعات دائرہ ان وتروں کے کھینچنے سے پیدا ہوتے ہیں ان کے

رقبوں کو آپس میں نسبت ۲، اور ۵۵ کی ہے $\left[\frac{2}{5} = \pi\right]$

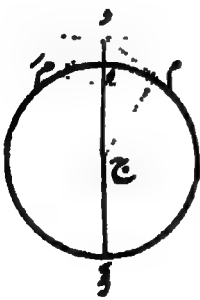
۹۔ تین مساوی دائرے ہیں، اگر ان میں سے ہر ایک باقی دو کو مس کرے اور ہر ایک کا نصف قطر ۱ ہو تو ثابت کرو

ان تینوں کے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ $\frac{1}{2} \times ۲۵$ ہے۔
 ۱۰۔ چھ مساوی دائرے ایک سطح مستوی پر اس طرح ترتیب
 دئے گئے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو اور دائروں کو
 مس کرتا ہے، اگر ان کے مرکز ایک اور دائرہ کے محیط پر واقع
 ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ $\frac{1}{2} \times (۳۱.۴ - ۲۲)$
 ہے جہاں $\frac{1}{2}$ ہر ایک مساوی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۱۔ ایک مثلث کے راس A سے ایک خط مستقیم AD کھینچا
 گیا ہے اور وہ قاعدہ سے ملکر زاویہ θ بناتا ہے، ثابت کرو کہ
 مثلثات ABD اور ADC کے بیرونی دائروں کا مشترک رقبہ
 $= \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)$ ہے۔
 جہاں a, b, c زاویوں کی تعداد
 بالترتیب θ, α, β ہے۔

۲۴۱۔ اتق کامیلان

فرض کرو کہ ایک نقطہ
 O کی بلندی سطح زمین
 سے b ہے، نقطہ P
 سے زمین پر کے ماس کھینچو
 جیسے OM اور OM' ،
 ان ماسوں کے سرے
 ایک دائرہ کے محیط پر واقع



ہوں گے اس دائرہ کو **افق مٹی** کہتے ہیں اور جو زاویہ ہر ایک ماس (مثلاً ω) سطح افق و ق جاتا ہے اس کو **افق کا میلان** کہتے ہیں فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر r ہے اور جو زمین کا قطر نقطہ 1 میں سے گذرتا ہے اس کا دوسرا سراؤ ہے تب بموجب اقلیدم ۳۶ ش

$$\omega^2 = \omega \times 1 = 1 \times \omega = \omega (1 + 2r)$$

$$\text{یعنی } \omega = \omega (1 + 2r)$$

اس سے ω کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے مگر تمام علی صورتوں میں ω بمقابلہ r کے بہت چھوٹا ہوتا ہے

[$r = \dots$ میل تقریباً اور ω پانچ میل سے کبھی زیادہ

نہیں ہوتا اور بالعموم اس سے بہت کم ہوتا ہے]

اس لئے ω بمقابلہ r کے بہت چھوٹا ہے

ω کی قیمت کا ایک اچھا تقریب یہ ہے

$$\omega = \omega (1 + 2r)$$

$$\text{میلان} = \omega = \omega (1 + 2r) = \omega (1 + 2r)$$

$$\text{نیز مس وج م} = \frac{\omega}{\cos \omega} = \frac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{2}} = \omega (1 + \frac{\omega^2}{2})$$

یعنی زاویہ میلان کا ایک اچھا تقریب یہ ہوا

$$\omega = \omega (1 + \frac{\omega^2}{2})$$

$$= \left(\frac{180}{\pi} \times \left[\frac{60 \times 90 \times 180}{\pi} \right] \right) = \left(\frac{180}{\pi} \right)$$

۲۱۔ مثال — ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر ۲۶۴ فٹ ہے، اگر زمین کا نصف قطر ۳۰۰۰ میل ہو تو روشنی ۱۱ چوٹی سے آفتاب کا میلان اور آفتاب مرئی کا فاصلہ دریافت کرو۔
یہاں $r = 3000$ میل اور $b = 264$ فٹ = $\frac{1}{16}$ میل

۲۔ معلوم ہوا کہ b بمقابلہ r کے بہت چھوٹا ہے

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{16} \times 3000 = 187.5 \text{ میل}$$

تیر ناویہ میلان = $\frac{180}{\pi} \times \theta$ نیم قطری زاویے = $\frac{1}{16}$ نیم قطری زاویے

$$\left(\frac{180}{\pi} \times \frac{1}{16} \right) = \left(\frac{54}{\pi} \right) = 17.1 \text{ تقریباً}$$

امثلہ نمبری ۲۲

۱۔ اسکے خلاف ذکر نہ ہو تو زمین کا نصف قطر ۳۰۰۰ میل فرض کیا جائے۔
— ایک پہاڑ کی بلندی ۲۰۰ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے
۲۔ کا میلان انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں دریافت کرو
۳۔ کا نصف قطر ۲۱ × ۱۰ فٹ ہے۔

— ایک روشنی گھر کا چراغ سطح سمندر سے ۱۹۶ فٹ بلند ہے
۴۔ کہ یہ زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے دکھائی دے سکتا ہے۔

— اگر زمین کا نصف قطر ۳۰۰۰ میل ہو تو ایک غبارہ کی
۵۔ دریافت کرو جبکہ آفتاب کا میلان ۱ ہو۔ نیز اگر غبارہ کی

بلندی ۲ میل ہو تو اقی کا میلان دریافت کرو۔

۴۔ ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۱۳۲ فٹ ہے اس کی روشنی ایک جہاز کے مستول کی چوٹی سے جو سطح سمندر سے ۶۶ فٹ بلند ہے عین اُسوقت دکھائی دینے لگی جبکہ جہاز روشنی گھر سے ایک خاص فاصلہ پر تھا ثابت کرو کہ یہ فاصلہ تقریباً ۲۴ میل ہے۔

۵۔ ایک جہاز کے مستول کی بلندی سطح سمندر سے ۶۶ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے ایک اور جہاز کے مستول کی چوٹی عین ۲۰ میل کے فاصلہ سے دکھائی دینے لگی ثابت کرو کہ مستول کی بلندیاں برابر ہیں۔

۶۔ ایک جہاز کا مستول سطح سمندر سے ۴۴ فٹ اونچا ہے، ایک روشنی گھر کی روشنی عین اسکی چوٹی سے دکھائی دیتی ہے، اس کے بعد جہاز ۱۵ منٹ کے لئے کسی خاص سمت میں جاتا ہے اور یہی روشنی تختہ جہاز کی بلندی سے جو سطح سمندر سے ۱۱ فٹ ہے دکھائی دینے لگتی ہے ثابت کرو کہ جہاز کی رفتار تقریباً ۳۳ ۱۶۵ میل فی گھنٹہ ہے۔

۷۔ اگر کسی مشاہدہ کر نیے مقام کی بلندی ۵ فٹ ہو تو ثابت کرو کہ وہاں کھڑے ہو کر ایک شخص کی نگاہ دور سے دور تقریباً ۳۳ میل دیکھ سکتی ہے۔

۸۔ زمین کے ایک رچ محیط میں ۱۰۰ لاکھ میٹر شامل ہیں اگر ایفل برج کی چوٹی ۳۰۰ میٹر اونچی ہو تو معلوم کرو کہ

سے زیادہ کہتے فاصلہ سے وہ نظر آسکتی ہے۔
 = ایک سیدھی نہر کے کنارے ایک ایک میل کے
 پر تین عمودی کھجے ہیں اور پانی کی سطح سے تینوں کی
 ں برابر ہیں، طرفین کے کھجوں کی چوٹیوں کا خط نظری
 ن کھجے کو اسکی چوٹی کے ۸ انچ نیچے قطع کرتا ہے،
 ۸ نصف قطر قریب ترین میل تک در یافت کرد۔



باب ہشتم

مقلوب و مستدیر حمل

۳۴۲ — اگر جب طہ = ۱ جہاں ۱ مقدار معلوم ہے تو ہم دفعہ ۸۸ سے جانتے ہیں کہ طہ کی ایک معین قیمت نہیں ہو سکتی، اس مساوات سے صرف یہی معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی قیمت زاویوں کے ایک غیر متناہی سلسلہ میں سے کسی ایک زاویہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

علامت ”جب ۱“ سے وہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت یا منفی زاویہ تعبیر ہوتا ہے جسکی جیب ۱ ہو۔ علامت ”جب ۱“ کو اس طرح پڑھتے ہیں کہ ”جیب منفی ایک ۱“ اور اس کو بڑی احتیاط سے $\frac{1}{\text{جیب } 1}$ سے تمیز کرنا چاہیے، اگر ضرورت ہو تو جب ۱ کو (جب ۱) لکھنا چاہیے۔

اس نے بخوبی یاد رہے کہ ”جب ۱“ ایک زاویہ ہے اور یہ علامت تعداداً ایک ایسے چھوٹے سے چھوٹے

کے درمیان) جن میں سے ہر ایک کی جیب اتمام و ہوگی
[مثلاً ۳۰° اور ۳۰° دو ٹونگی جیب اتمام $\frac{1}{2}$ ہیں]

اس صورت میں ہم چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ
لینگے، پس اگر ۱ مثبت ہو تو زاویہ جم ۱ بھی ۰° اور ۹۰°
کے درمیان واقع ہوگا

اسی طرح سے اگر ۱ منفی ہو تو جم ۱ زاویہ ۹۰° اور ۱۸۰° کے
درمیان واقع ہوگا۔

مثال جم ۱ = $\frac{1}{2}$ = ۳۰°، جم ۱ = $(-\frac{1}{2})$ = ۱۲۰°
اگر ۱ مثبت ہو تو مست ۱ ہمیشہ ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع
ہوگا اور اگر ۱ منفی ہو تو یہ ۹۰° اور ۰° کے درمیان واقع
ہوگا

مثال مست ۱ = ۳۰°، مست ۱ = (-۱) = ۱۲۰°
۲۴۶ — **مثال** — ثابت کر دو کہ جب $\frac{1}{2}$ = جم ۱ = جب $\frac{1}{2}$ = جب $\frac{1}{2}$
فرض کر دو کہ جب $\frac{1}{2}$ = ع یعنی جب ع = $\frac{1}{2}$



اور اس نے جم ع = $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

فرض کر دو کہ جم ۱ = $\frac{1}{2}$ = یعنی جم ب = $\frac{1}{2}$



اور اس نے جب ب = $1 - \frac{14}{16} = \frac{2}{16}$

فرض کر دو کہ جب ۱ = $\frac{1}{2}$ = جب یعنی جب ج = $\frac{1}{2}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ع = ب = ج

یعنی ثابت کرنا ہے کہ جب (ع = ب) = جب ج

اب جب (ع = ب) = جب ع جم ب = جم ع جب ب

$$= \frac{5}{13} \times \frac{3}{8} - \frac{12}{13} \times \frac{5}{8} = \frac{15 - 60}{104} = \frac{-45}{104} = \frac{45}{104} = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2}$$

اس لئے ربط ثابت ہوا

مثال ۲ — ثابت کرو کہ مس $\frac{1}{2}$ + مس $\frac{1}{4}$ = مس $\frac{3}{4}$

فرض کرو کہ مس $\frac{1}{2}$ = ع یعنی مس ع = $\frac{1}{2}$

اور فرض کرو کہ مس $\frac{1}{4}$ = ب یعنی مس ب = $\frac{1}{4}$

ہیں ثابت کرنا ہے کہ ۲ ع + ب = $\frac{3}{4}$

اب مس ۲ ع = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} \text{ مس ع}}{1 - \text{مس ع}}$

نیز مس (۲ ع + ب) = $\frac{\frac{1}{2} \text{ مس ع} + \frac{1}{4} \text{ مس ب}}{1 - \text{مس ع} - \text{مس ب}}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8} - 1} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{-7} = -\frac{6}{7} = \frac{6}{7} \text{ مس } \frac{3}{4}$$

مثال ۳ — ثابت کرو کہ مس $\frac{1}{8}$ - مس $\frac{1}{16}$ = مس $\frac{1}{16}$

فرض کرو کہ مس $\frac{1}{8}$ = ع یعنی مس ع = $\frac{1}{8}$

تب مس ۲ ع = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{4} \text{ مس ع}}{1 - \text{مس ع}}$

اور مس ۴ ع = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} \text{ مس ع}}{1 - \text{مس ع}}$

یعنی مس ۴ ع تقریباً ایک کے برابر ہے اور اس لئے ۴ ع تقریباً $\frac{1}{2}$ ہے

فرض کرو کہ ۴ ع + مس $\frac{1}{16}$ = مس $\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{1}{8} = \text{مس} \left(\frac{1}{4} + \text{مس} \frac{1}{16} \right) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{1 - \text{مس} \frac{1}{16}} \text{ (دفعہ ۱۰۶)}$

$$\frac{1}{129} = لا$$

اس نے م مس ا - م س ا = مس ا = $\frac{1}{129}$ = $\frac{17}{129}$
مثال ۴ - ثابت کرو کہ

$$مس ا + م س ا = م س ا = \frac{1+1}{1-1}$$

فرض کرو کہ مس ا = ع یعنی مس ع = ا

فرض کرو کہ م س ا = ب یعنی م س ب = ب

نیز فرض کرو کہ مس ا ($\frac{1+1}{1-1}$) = ج یعنی مس ج = $\frac{1+1}{1-1}$
 ہیں ثابت کرنا ہے کہ ع + ب = ج

$$اب مس (ع + ب) = ا - مس ع مس ب = \frac{1+1}{1-1} = مس ج$$

یعنی ربط ثابت ہوا

تعلق مندرجہ بالا میں صرف ضابطہ مس (لا + ما) = $\frac{مس لا + مس ما}{1 - مس لا مس ما}$ کو
 مطلوب طریق کتابت کے موافق بیان کیا گیا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ مس لا = ا یعنی لا = مس ا

اور مس ما = ب یعنی ما = م س ا

$$تب مس (لا + ما) = \frac{1+1}{1-1}$$

$$= لا + ما = مس ا = \frac{1+1}{1-1}$$

$$یعنی مس ا + م س ا = م س ا = \frac{1+1}{1-1}$$

مندرجہ بالا میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ اب > اب یعنی $\frac{1+1}{1-1}$ مثبت ہے

اور اسلئے مس ا $\frac{1+1}{1-1}$ زیادہ ۰ اور ۰ کے درمیان واقع ہے

لیکن اگر اب < اتو $\frac{1+1}{1-1}$ اور اس نے بموجب ہائی

تقریب کے سن $\frac{1}{1-\frac{1}{b}}$ ایک متنی زاویہ ہے اسلئے یہاں
جہ متنی زاویہ ہے اور چونکہ سن $(\pi + جہ) =$ سن جہ اسلئے
ضابطہ مطلوب یہ ہونا چاہیئے

$$\text{سن } 1 + \text{سن } \pi = \text{سن } \frac{1}{1-\frac{1}{b}}$$

مثال ۵ — ثابت کرو کہ جم $\frac{17}{43} = \frac{1}{5} \text{ سن } 1 + \frac{1}{5} \text{ سن } 2 =$ جب $\frac{3}{5}$
چونکہ $16 = 43 - 27$



اسلئے جم $\frac{17}{43} = \text{سن } \frac{17}{43}$
نیز بموجب مثال ۱، جب $\frac{3}{5} = \text{سن } \frac{3}{5}$
اسلئے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{سن } \frac{17}{43} + \frac{1}{5} \text{ سن } 2 = \text{سن } \frac{3}{5}$$

$$\text{اب سن } \left[\frac{1}{5} \text{ سن } 2 \right] = \frac{\text{سن } \left[\frac{1}{5} \text{ سن } 2 \right]}{\left[\frac{1}{5} \text{ سن } 2 \right] - 1} =$$

$$\frac{5}{12} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5} - 1} =$$

$$\text{یعنی سن } 2 = \frac{5}{12}$$

$$\text{پس سن } \left[\text{سن } \frac{17}{43} + \frac{1}{5} \text{ سن } 2 \right] = \text{سن } \left[\frac{17}{43} + \frac{5}{12} \right]$$

$$\frac{3}{5} = \frac{504}{444} = \frac{315 + 192}{80 - 454} = \frac{\frac{5}{12} + \frac{17}{43}}{\frac{5}{12} \times \frac{17}{43} - 1} =$$

$$\text{یعنی سن } \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \text{ سن } 2 + \frac{17}{43} \text{ سن } 1$$

مثال ۶ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$مس^۱ = \frac{۱-۷}{۱} مس^۱ + \frac{۱+۷}{۱-۱} مس^۱ = مس^۱ (-۷)$$

طرفین مساوات کے پاس لینے سے

$$مس [مس^۱ \frac{۱+۷}{۱-۱}] + مس [مس^۱ \frac{۱-۷}{۱}]$$

$$= مس [مس^۱ \frac{۱+۷}{۱-۱}] + مس [مس^۱ \frac{۱-۷}{۱}]$$

$$= مس \{ مس^۱ (-۷) \} = -۷$$

$$-۷ = \frac{\frac{۱-۷}{۱} + \frac{۱+۷}{۱-۱}}{\frac{۱-۷}{۱} \times \frac{۱+۷}{۱-۱} - ۱} \text{ یعنی}$$

$$-۷ = \frac{۱+۷-۷}{۱-۱} \text{ یعنی } ۲ = ۱$$

اگر اس قیمت کو مساوات میں منبج کریں تو اسکے دائیں طرف کا کرن
مثبت ہوتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ درحقیقت لاک کوئی
ایسی قیمت نہیں جو شرائط مساوات کو پورا کرے
قیمت $۲ = ۱$ مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$مس^۱ = \frac{۱+۷}{۱-۱} مس^۱ + \frac{۱-۷}{۱} مس^۱ + ۱ = مس^۱ (-۷) + ۱$$

امثلہ نمبری ۳۳

[طالب علم کو امثلہ ذیل (مثلاً ۱-۴، ۸، ۱۲، ۱۶) کے نتائج کی
تصدیق عمل تریسی سے کرنی چاہئے]
نہایت کرد کہ

$$۱ - جب^۱ \frac{۲}{۵} + جب^۱ \frac{۹}{۱۲} = جب^۱ \frac{۴۶}{۸۵}$$

$$2 - \text{جیب}^2 = \frac{5}{13} \text{جیب}^2 + \frac{6}{15} \text{جیب}^2 = \left(\frac{202}{115}\right) \text{جیب}^2$$

$$3 - \text{جم} = \frac{2}{5} \text{س} + \frac{2}{5} \text{س} = \frac{4}{5} \text{س}$$

$$\frac{35}{48} \text{ hr} = \frac{12}{13} \text{ hr} + \frac{5}{8} \text{ hr} - 2$$

٥- جـ ١ = ١ = ٢ جـ ٢ = $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$ = جـ ٣ = $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\pi = \frac{6}{15} \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{12}{15} \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{3}{15} \sqrt{\frac{3}{5}} - 4$$

$$٦ - \text{مستأ} \frac{1}{4} + \text{مستأ} \frac{1}{8} = \text{جبأ} \frac{1}{64} + \text{ممأ} ٣١ = ٢٥$$

$$8 - \text{ست} \frac{1}{2} + \text{ست} \frac{1}{12} = \text{ست} \frac{7}{6}$$

۹۔ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{6}$ سے $\frac{1}{2}$

۱۰۔ $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ مست' + مست' = $\frac{1}{5}$ جز'

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \text{ مست } 1 + \frac{1}{2} \text{ مست } 2 + \frac{1}{6} \text{ مست } 3 \quad \text{--- 11}$$

$$12 - 12\text{مست} + \frac{2}{3}\text{مست} - \frac{1}{14}\text{مست} = \frac{17}{14}$$

$$13 - \text{مستأ} \frac{1}{12} + \text{مستأ} \frac{1}{6} + \text{مستأ} \frac{1}{4} + \text{مستأ} \frac{1}{2} = \frac{17}{12}$$

$$14 - 3 \text{ ست } + \frac{1}{2} \text{ ست } = \frac{1}{14} \text{ ست } - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{8x} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8x} - 15$$

۱۶۔ مستحق = $\frac{۱۲۰}{۱۱۹}$ جب $\frac{۵}{۱۳}$

$$\frac{11}{12} = \frac{11}{12} - \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

۸۔ مس + ط = مس + $\frac{ط}{ط}$ = مس + $\frac{ط-ط}{ط-ط}$ = مس + ط جہاں ط

مثبت ہے اگر $\langle \frac{1}{\pi} \rangle < \pi$ اور $\pi = \pi + \pi - \pi$

اگر $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_2}$ اور $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{n_3}$

۱۹۔ سن ۱۱ (۱+۱+۱) + سن ۱۰ (۱+۱+۱) + سن ۹ (۱+۱+۱) + سن ۸ (۱+۱+۱) + سن ۷ (۱+۱+۱) + سن ۶ (۱+۱+۱) + سن ۵ (۱+۱+۱) + سن ۴ (۱+۱+۱) + سن ۳ (۱+۱+۱) + سن ۲ (۱+۱+۱) + سن ۱ (۱+۱+۱) = ۱۹

$$4 \text{ مس } 1 = \frac{(ج + ب + 1)ج}{ب} = 7$$

$$20 - \text{مس } 1 = \frac{ب + 1}{ب} + \frac{1 + ج}{ج} + \frac{1 + ج}{ج} = \frac{1 + 1 + ج}{1 - ج}$$

$$21 - \text{مس } 1 = \text{مس } 2 + (1 + ن) = \text{مس } 1 (ن + 1 + 1)$$

$$22 - \text{جم } 1 = \left(\frac{1}{2}\right) = \text{جب } 1 = \text{مس } 1 = \frac{1}{2}$$

$$23 - \text{مس } 1 = [\text{مس } 2 (25 - 2)] = \left[\frac{2}{2}\right] = \text{جم } 1 = \left[\frac{2}{2}\right] = \text{جب } 1 = \text{جم } 1 = \frac{2}{2}$$

$$24 - \text{مس } 1 = \text{مس } 2 = [\text{تم } 1 - \text{مس } 1] = \text{مس } 1 = \text{مس } 1$$

$$25 - \text{مس } 1 = \left[\frac{1}{2}\right] = \text{مس } 1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \text{مس } 1 = \text{جب } 1 = \text{جم } 1 = \frac{1}{2}$$

$$26 - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جم } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{جب } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{جم } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{جب } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1}$$

$$26 - \text{اگر جم } 1 = \frac{1}{2} + \text{جم } 1 = \frac{1}{2} = \text{جم } 1 = \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \text{جم } 1 = \frac{1}{2} = \text{جب } 1 = \frac{1}{2}$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$28 - \text{مس } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{مس } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1}$$

$$29 - \text{مس } 1 = 1 + \text{مس } 1 = \frac{1}{2} = \text{مس } 1 = \frac{1}{2}$$

$$30 - \text{مس } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1} + \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{مس } 1 = \frac{1 - 1}{1 - 1}$$

$$۳۱ - مس - (۱ + ۱) = مم - (۱ - ۱) = جب - ۱ + جم - ۱$$

$$۳۲ - مس - (۱ + ۱) + مس - (۱ - ۱) = مس - ۱$$

$$۳۳ - مس - (جم - ۱) = مس - (۲ - ۱)$$

$$۳۴ - مس - ۱ + ۲ - مم - ۱ = ۲ - ۱$$

$$۳۵ - مس - جم - ۱ = جب - مم - ۱$$

$$۳۶ - مم - ۱ - مم - (۲ + ۱) = ۱۵$$

$$۳۷ - جم - ۱ - ۱ + مس - ۱ = ۱ - ۱$$

$$۳۸ - مم - ۱ + مم - (۱ - ۱) = مم - (۱ - ۱)$$

$$۳۹ - جب - ۱ + جب - ۱ = ۱ - ۱$$

$$۴۰ - جب - ۱ = ۱ - ۱$$

$$۴۱ - مس - ۱ + مس - ۱ + مس - ۱ + مس - ۱ = ۱ - ۱$$

$$۴۲ - قط - ۱ - قط - ۱ = قط - ۱ - قط - ۱$$

$$۴۳ - مم - ۱ = مم - ۱ + مم - ۱$$

$$۴۴ - مس - ۱ = مم - ۱ - مم - ۱$$

مفصلہ ذیل کی ترسیات کیجیو

$$۴۵ - جب - ۱ [انتباہ اگر ما = جب - ۱ لا تو لا = جب - ۱ اور$$

اس ترسیم کا و ما سے وہی تعلق ہے جو ترسیم دفعہ ۶۸ کا ولا

سے ہے

۴۶ - جم - لا
 ۴۷ - مس - لا
 ۴۸ - مم - لا
 ۵۰ - قط - لا
 ۵۱ - مس - لا اور ۲ لا کی
 تریات کھینچے اور ان کے نقاط تقاطع دریافت کرنے سے
 ثابت کرو کہ مساوات مس - لا = لا کے حل کی چھوٹی
 سے چھوٹی مثبت قیمت تقریباً ۶۷ کے قوسی ناپ کے
 برابر ہے۔



باب نوزدہم

چند آسان مثلثی سلسلوں کا بیان

۴۴۷۔ اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو ان کی جیبوں کا حاصل جمع دریافت کرو
فرض کرو کہ زاوے $ع$ ، $ع + ب$ ، $ع + ب + ۲$ ، $ع + ب + ۴$ ، $\{ع + (ن - ۱)ب\}$ ہیں
تیر فرض کرو کہ

ص = جب $ع$ + جب $(ع + ب)$ + جب $(ع + ب + ۲)$ + + جب $\{ع + (ن - ۱)ب\}$
یو جب دفعہ ۱۰۳

$$\begin{aligned} ۲ \text{ جب } ع \text{ جب } ع &= \frac{ع}{۲} = \text{جم} (ع - \frac{ع}{۲}) - \text{جم} (\frac{ع}{۲} + ع) \\ ۲ \text{ جب } (ع + ب) \text{ جب } ع &= \frac{ع + ب}{۲} = \text{جم} (ع + ب + \frac{ع + ب}{۲}) - \text{جم} (\frac{ع + ب}{۲} + ع + ب) \\ ۲ \text{ جب } (ع + ب + ۲) \text{ جب } ع &= \frac{ع + ب + ۲}{۲} = \text{جم} (ع + ب + ۲ + \frac{ع + ب + ۲}{۲}) - \text{جم} (\frac{ع + ب + ۲}{۲} + ع + ب + ۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲ \text{ جب } \{ع + (ن - ۱)ب\} \text{ جب } ع &= \frac{ع + (ن - ۱)ب}{۲} = \text{جم} \{ع + (ن - ۱)ب + \frac{ع + (ن - ۱)ب}{۲}\} - \text{جم} \{\frac{ع + (ن - ۱)ب}{۲} + ع + (ن - ۱)ب\} \\ ۲ \text{ جب } \{ع + (ن - ۱)ب\} \text{ جب } (ع + ب) &= \frac{ع + (ن - ۱)ب + ع + ب}{۲} = \text{جم} \{ع + (ن - ۱)ب + ع + ب + \frac{ع + (ن - ۱)ب + ع + ب}{۲}\} - \text{جم} \{\frac{ع + (ن - ۱)ب + ع + ب}{۲} + ع + (ن - ۱)ب + ع + ب\} \end{aligned}$$

ان ن سطروں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲ جب $\frac{۳}{۴}$ ص = جم (ع - $\frac{۳}{۴}$) - جم (ع + $\frac{۳}{۴}$) + (ن - $\frac{۱}{۴}$) ب {
۱۰ انہیں طرف کی باقی رقیں ایک دوسرے کو ساقط کر دیتی ہیں

اس نے بموجب دفعہ ۱۰۰

۲ جب $\frac{۳}{۴}$ ص = ۲ جب (ع + $\frac{۳}{۴}$) + (ن - $\frac{۱}{۴}$) ب { جب $\frac{۳}{۴}$ ن

یعنی ص = جب (ع + $\frac{۳}{۴}$) + (ن - $\frac{۱}{۴}$) ب { جب $\frac{۳}{۴}$ ن

جب $\frac{۳}{۴}$

مثال - فرض کرو کہ ب = ۲ ع تب

جب ع + جب ۳ ع + جب ۵ ع + + جب (ن - ۱) ع

$$= \frac{\text{جب (ع + } \frac{۳}{۴} \text{) + (ن - } \frac{۱}{۴} \text{) ب { جب } \frac{۳}{۴} \text{ ن ع}}{\text{جب ع}} = \text{جب } \frac{۳}{۴} \text{ ن ع}$$

۸ ۳ ۲ — اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں

ہو تو ان کی جیوب التمام کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ زاوئے ع، ع + ب، ع + ۲ ب، ع + (ن - ۱) ب ہیں

نیز فرض کرو کہ

ص = جم ع + جم (ع + ب) + جم (ع + ۲ ب) + + جم (ع + (ن - ۱) ب)
ب بموجب دفعہ ۱۰۳

۲ جم ع جب $\frac{۳}{۴}$ = جب (ع + $\frac{۳}{۴}$) - جب (ع - $\frac{۳}{۴}$)

۲ جم (ع + ب) جب $\frac{۳}{۴}$ = جب (ع + $\frac{۳}{۴}$) - جب (ع + $\frac{۳}{۴}$)

۲ جم (ع + ۲ ب) جب $\frac{۳}{۴}$ = جب (ع + $\frac{۳}{۴}$) - جب (ع + $\frac{۳}{۴}$)

$$2. \text{ جسم } 2 \text{ (م) } + \{ 7(12 - 2) \} = \text{جسم } 3 \text{ (م) } + \{ 7(12 - 2) \} = \text{جسم } 4 \text{ (م) } + \{ 7(12 - 2) \}$$

اور $\frac{7}{8}$ جب $(\frac{1}{2} - \frac{n}{6})$ = جب $(\frac{1}{2} - \frac{n}{6}) + (\frac{1}{2} - \frac{n}{6})$ = جب $(\frac{1}{2} - \frac{n}{6}) + (\frac{1}{2} - \frac{n}{6})$

ان ن سطروں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲۔ ص \times جب $\frac{7}{4} =$ جب $\{ع + (ن - \frac{1}{4})\}$ - جب $(ع - \frac{7}{4})$
 بائیں طرف کی باقی رقیں ایک دوسرے کو ساقط کر دیتی ہیں

اسے بوجب دفعہ ۱۰۰

$$۱۷ \text{ ص } x \text{ جب } \frac{x}{2} = \{e + \frac{x}{2}\} \text{ جم } \{e + \frac{x}{2}\} \text{ جب } \frac{x}{2}$$

یعنی ص = $\frac{\text{جم} \{ \text{عم} + \frac{\text{ن}-1}{2} \text{ بہ} \} \text{ جب } \frac{\text{ن}}{2}}{\text{جب } \frac{\text{ن}}{2}}$

۲۴۹ — دفات ۲۴۷ اور ۲۴۸ میں ص کی قیمت دریافت کرنے کے دونوں جملے معدوم ہوتے ہیں اگر جب $\frac{1}{2}$ صفر ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{\pi}{2}$ کے کسی ضلع کے برابر ہو۔

یعنی جب زاویہ $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ جہاں ϵ کوئی صحیح عدد ہے

يعني جب زاويه = ع $\times \frac{\pi}{n}$

اس لئے ثابت ہوا کہ اگر ن زاوے سلسلہ حسابہ میں ہوں تو انکی جیوب (یا جیوب التمام) کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اگر زاویوں کا فرق مشترک $\frac{\pi}{2}$ کا کوئی ضعف ہو

اشلہ جم عہ + جم (عہ + $\frac{\pi}{2}$) + جم (عہ + $\frac{\pi}{2}$) + ن رقموں تک =
 اور جب عہ + جب (عہ + $\frac{\pi}{2}$) + جب (عہ + $\frac{\pi}{2}$) + ن رقموں تک =
 ۲۵۰ — سلسلہ جب عہ - جب (عہ + $\frac{\pi}{2}$) + جب (عہ + $\frac{\pi}{2}$) - کون
 رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۷۹

$$\text{جب (عہ + } \pi + \text{بہ + بہ) = جب (عہ + بہ)}$$

$$\text{جب (عہ + } \pi + \text{بہ + بہ + بہ + بہ) = جب (عہ + بہ)}$$

$$\text{جب (عہ + } \pi + \text{بہ + بہ + بہ + بہ + بہ + بہ) = جب (عہ + بہ)}$$

$$\text{اسلے سلسلہ = جب عہ + جب (عہ + } \pi + \text{بہ + بہ) + جب } \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{عہ} \\ + \text{جب } \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{عہ} + \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{عہ} + \dots$$

$$= \frac{\text{جب } \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{عہ} + \frac{\pi - \pi}{2} \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{جب } \frac{\pi + \text{بہ}}{2}}{\text{جب } \frac{\pi + \text{بہ}}{2}} \text{ بموجب دفعہ ۲۴۷}$$

$$= \frac{\text{جب } \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{عہ} + \frac{\pi - \pi}{2} \{ \pi + \text{بہ} \} + \text{جب } \frac{\pi + \text{بہ}}{2}}{\text{جب } \frac{\pi + \text{بہ}}{2}}$$

مثال ۲ — سلسلہ جم عہ + جم عہ + جم عہ + جم عہ + کو
 ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۱۱۳

$$\text{جم } ۳ \text{ عہ} = \text{جم } ۲ \text{ عہ} - \text{جم } ۳ \text{ عہ}$$

$$\text{یعنی } ۴ \text{ جم عہ} = ۳ \text{ جم عہ} + \text{جم } ۳ \text{ عہ}$$

اسی طرح سے ۲ جم ۲ = ۳ جم ۲ + ۱ جم ۲

۲ جم ۳ = ۲ جم ۲ + ۱ جم ۳

.....

اس نے اگر سلسلہ کا حاصل جمع صں ہو تو

۳ صں = $(۲$ جم ۲ + ۱ جم ۳) + $(۳$ جم ۲ + ۲ جم ۳) + $(۴$ جم ۲ + ۳ جم ۳) + =

۳ = $(۲$ جم ۲ + ۲ جم ۳ + ۲ جم ۴ + + ۱ جم ۳ + ۱ جم ۴ +)

۳ = $\frac{۲}{۲} \text{ جم } ۲ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۳ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۴ + \dots + \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۳ + \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۴ + \dots$

۳ = $\frac{۲}{۲} \text{ جم } ۲ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۳ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۴ + \dots + \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۳ + \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۴ + \dots$

اسی طرح سے اگر زائے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیوں کے

کمبوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

نتیجہ صریح — چونکہ

۲ جب ۱ = ۱ - جم ۲ اور ۲ جم ۱ = ۱ + جم ۲

اس نے جیوب اتمام کے مربوں کا حاصل جمع دریافت ہو سکتا ہے

نیز چونکہ ۸ جب ۱ = ۲ [۱ - جم ۲]

۲ = ۲ - جم ۲ + جم ۲ = ۲ - جم ۲ + جم ۲

پس جیوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ حاصل ہو سکتا ہے اسی طرح سے

جیوب اتمام کی قوتوں کا مجموعہ بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۳ — سلسلہ جم ۱ جب ۱ + جم ۲ جب ۲ + جم ۳ جب ۳ + جم ۴ جب ۴ + =

کون رتوں تک جمع کرو۔

اس لئے اگر دائرہ کا نصف قطر ہو تو

$$\begin{aligned} \text{ع } 1 &= 2 \text{ ر جب } \frac{1}{2} = 2 \text{ ر جب } \frac{1}{2} \\ \text{ع } 1 &= 2 \text{ ر جب } \frac{1}{2} = 2 \text{ ر جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \text{ع } 1 &= 2 \text{ ر جب } \frac{1}{2} = 2 \text{ ر جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

اس لئے مجموعہ مطلوبہ = $2 \text{ ر جب } \frac{1}{2} + \text{جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \text{جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \dots + \text{جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \dots + \text{جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$
[رقموں تک]

$$\begin{aligned} 2 \text{ ر جب } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \text{ جب } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ (دفعہ ۲۷۷)} &= \\ 2 \text{ ر جب } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \text{ جب } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} &= \\ 2 \text{ ر جب } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \text{ جب } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} &= \end{aligned}$$

امثلہ نمبری ۴۴

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

$$\begin{aligned} 1 - \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n &= \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n \\ 2 - \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n &= \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n \end{aligned}$$

$$3 - \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n = \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n$$

$$4 - \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n = \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \dots + \text{جم } n$$

$$5- \text{جب } ع - \text{جب } (ع + ب) + \text{جب } (ع + ۲ + ب) + \dots + \text{ن رقبون} \\ \text{جم } ع - \text{جم } (ع + ب) + \text{جم } (ع + ۲ + ب) + \dots + \text{ن رقبون} \\ = \text{مس } \{ ع + \frac{ن-۱}{۲} (ب + ۲) \}$$

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

$$6- \text{جم } \frac{ن}{۱+ن} + \text{جم } \frac{ن-۱}{۱+ن} + \text{جم } \frac{ن-۲}{۱+ن} + \dots + \text{ن رقبون} \\ 7- \text{جم } ع - \text{جم } (ع + ب) + \text{جم } (ع + ۲ + ب) - \dots - \text{ن رقبون} \\ 8- \text{جب } ط + \text{جب } \frac{ن-۱}{۲} ط + \text{جب } \frac{ن-۲}{۲} ط + \dots + \text{ن رقبون} \\ 9- \text{جم } لا + \text{جب } ۳ لا + \text{جم } ۵ لا + \text{جب } ۷ لا + \dots + \text{جب } (ن-۱) لا \\ 10- \text{جب } ع جب ۲ ع + \text{جب } ۲ ع جب ۳ ع + \text{جب } ۳ ع جب ۴ ع + \dots + \text{ن رقبون} \\ 11- \text{جم } ع جب ۲ ع + \text{جب } ۲ ع جب ۳ ع + \text{جم } ۳ ع جب ۴ ع + \dots + \text{جب } ۴ ع جب ۵ ع + \dots + \text{ن رقبون تک}$$

$$12- \text{جب } ع جب ۳ ع + \text{جب } ۲ ع جب ۴ ع + \text{جب } ۲ ع جب ۵ ع + \dots + \text{ن رقبون} \\ 13- \text{جم } ع جب ۲ ع + \text{جم } ۳ ع جب ۴ ع + \text{جم } ۵ ع جب ۶ ع + \dots + \text{ن رقبون} \\ 14- \text{جب } ۲ ع + \text{جب } ۲ ع + \text{جب } ۳ ع + \dots + \text{ن رقبون} \\ 15- \text{جب } ط + \text{جب } (ط + ع) + \text{جب } (ط + ۲ + ع) + \dots + \text{ن رقبون} \\ 16- \text{جب } ۲ ع + \text{جب } ۲ ع + \text{جب } ۳ ع + \dots + \text{ن رقبون} \\ 17- \text{جم } ع + \text{جم } ۲ ع + \text{جم } ۳ ع + \dots + \text{ن رقبون} \\ 18- \text{جم } ط جب ۲ ط + \text{جم } ۳ ط + \text{جم } ۴ ط + \dots + \text{ن رقبون} \\ 19- \text{جب } ع جب (ع + ب) - \text{جب } (ع + ب) + \text{جب } (ع + ۲ + ب) + \dots + \text{ن رقبون} \\ 20- \text{سلسلہ جب } ع + \text{جب } ۲ ع + \text{جب } ۳ ع + \dots + \text{ن رقبون}$$

کے مجموعہ سے سلسلہ ۱+۲+۳+.....+ن کا مجموعہ عدد کو
ہدایت قلیل بنانے سے حاصل کرو۔

۲۲۔ سلسلہ ۱+۳+۵+..... کے ن رقموں کے

مجموعہ کو مثال دفعہ ۲۴ کے نتیجہ سے حاصل کرو۔

۲۳۔ اگر عدد = $\frac{11}{2}$ تو ثابت کرو کہ

۲ (جم ۱ عدد + جم ۲ عدد + جم ۳ عدد + جم ۴ عدد) اور

۲ (جم ۳ عدد + جم ۵ عدد + جم ۷ عدد + جم ۹ عدد)

مساوات ۱+۳+۵=۲ کی قیمتیں ہیں

۲۴۔ ایک ن اضلاع کی منظم کثیرالاضلاع ا ب ج د..... ایک

دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و ا بر نصف قطر رہے، اگر

کوئی نقطہ ع قوس ا ب پر ایسا یا جائے کہ ع و ا = طہ

تو ثابت کرو کہ

ع ا د ب + ع ا د ج + ع ا د د +.....+ ع ب د ج +.....

$$= \left[۲ \text{ جم } \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} \right) \text{ ق م } \frac{\pi}{۲} - ن \right]$$

۲۵۔ ن اضلاع کی دو منظم کثیرالاضلاع اشکال ہیں، ان میں

سے ایک ہونے والے دائرہ کے اندر اور دوسری باہر بنی

ہوئی ہے، اگر ایک کثیرالاضلاع کے راس زاویہ کو دوسری

کثیرالاضلاع کے ہر ایک راس زاویہ کے ساتھ خطوط کے ذریعہ

وصل کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ ان خطوط کے مربعوں کے

مجموعہ کو اشکال کثیرالاضلاع کے رقبوں کے مجموعہ سے

نسبت ۲: جب $\frac{2}{3}$ ہوگی۔

۲۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوا ہے، اس کے زاویوں کے راس $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle n$ ہیں، اگر محیط دائرہ پر کوئی نقطہ و نقاط $\angle 1$ اور $\angle n$ کے درمیان ۳ تو ثابت کرو کہ

$\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 180^\circ + \angle 1 + \angle n$

۲۷۔ ایک n اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، دائرہ کا نصف قطر r ہے اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود نکال جائیں تو ثابت کرو کہ

$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}$ اور $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}$

جہاں r کوئی عمود ہے اور علامت $\frac{1}{r}$ حاصل جمع ان تمام رقوموں کا جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے پہلے علامت لکھی ہوئی ہے۔

باب ہستم

استقاط

۲۵۱۔ اگر ایک مقدار مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو ضرور ہے کہ ان مساواتوں کی مستقل مقداروں میں کوئی ربط ہو تاکہ مقدار مجہول کی ایک ہی قیمت دو نوں کی شرائط کو پورا کرے، مثلاً فرض کرو کہ ایک مقدار مجہول لا ذیل کی دو مساواتوں کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

$$ا + ب = . \quad \text{اور} \quad ج + لا + د + لا + ع = .$$

پہلی مساوات سے $لا = -\frac{ب}{۱}$ اور لا کی اس قیمت سے دوسری مساوات کی شرائط بھی پوری ہونگی اگر

$$ج - \left(\frac{ب}{۱}\right) + د - \left(\frac{ب}{۱}\right) + ع = .$$

یعنی اگر $ب + ج - ا + د + لا + ع = .$

یہ مساوات دو مندرجہ بالا معادلات میں سے مقدار
بھول لاگو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے
اس کو حاصل استقاط کہتے ہیں۔

۲۵۲۔ نیز فرض کرو کہ ایک زاویہ طہ شرائط
معادلات جب طہ = ب اور جم طہ = ج کو پورا کرتا ہے

جب طہ = ب اور جم طہ = ج

اب طہ کی تمام قیمتوں کے لئے

جب طہ + جم طہ = ا، یعنی اس صورت میں

ب + ج = ا

اور یہ مطلوبہ حاصل استقاط ہے۔

۲۵۳۔ جب ایک مقدار بھول کی دو مساواتیں

معلوم ہوں تو اصولاً ہم ان معادلات سے اس

مقدار کو ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں مگر علی طور پر بظاہر

سادہ سوالات کے حل کرنے میں بھی ذہانت اور

اور حکمت عملی کی ضرورت ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اگر دو مقادیر بھول کی تین

مساواتیں دی ہوئی ہوں تو کم از کم نظری بحث

میں ہم ان مقادیر بھولہ کو ان معادلات سے

ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں۔

۲۵۴۔ اس جگہ ہم استقاط کی چند مثالیں دیں گے۔

مثال ۱۔ معادلات اجم طہ + ب جب طہ = ج

اور $\text{دجم ط} + \text{ع جب ط} = \text{ف}$

ط کو ساقط کرو۔

ب چلیپائی یا کسی اور طرح سے مساوات کو جم ط اور جب ط کے حل کرو

$$\frac{\text{جم ط}}{\text{ب ف} - \text{ج ع}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ج د} - \text{ا ف}} = \frac{1}{\text{ب د} - \text{ا ع}}$$

$$1 = \frac{\text{جم ط} + \text{جب ط}}{\frac{(\text{ب ف} - \text{ج ع}) + (\text{ج د} - \text{ا ف})}{(\text{ب د} - \text{ا ع})}}$$

(ب ف - ج ع) + (ج د - ا ف) = (ب د - ا ع) \times جم ط
 مثال ۲۔ مساوات ذیل سے ط کو ساقط کرو

$$\frac{\text{ا ط}}{\text{جم ط}} - \frac{\text{ب ط}}{\text{جب ط}} = \text{ا} - \text{ب} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\dots \dots \dots (۲) = \frac{\text{ب ا جم ط}}{\text{جب ط}} + \frac{\text{ا لا جب ط}}{\text{جم ط}}$$

مساوات (۲) سے $\text{ا لا جب ط} = \text{ب ا جم ط}$

$$\frac{\text{جم ط} + \text{جب ط}}{\text{ف}(\text{ا لا}) + \text{ف}(\text{ب ا})} = \frac{\text{جم ط}}{\text{ف}(\text{ا لا})} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ف}(\text{ب ا})}$$

(دیکھو ٹوڈ ہنٹر اور لونی کا الجبرا مبتدیوں کیلئے دفعہ ۱۷۷)

$$= \frac{1}{\text{ف}(\text{ا لا}) + \text{ف}(\text{ب ا})}$$

$$\frac{[دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}]}{دب(ب)} = \frac{1}{جب ط}$$

$$\frac{[دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}]}{دب(لا)} = \frac{1}{جم ط}$$

یعنی مساوات (۱) میں جم ط اور جب ط کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$[دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \times \frac{1}{دب(لا)} - [دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \times \frac{1}{دب(ب)} =$$

$$= [دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \times \frac{1}{دب(لا)} - [دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \times \frac{1}{دب(ب)}$$

$$= \left\{ [دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \right\} \times \frac{1}{دب(لا)} - \left\{ [دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \right\} \times \frac{1}{دب(ب)}$$

یعنی (۱) $[دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \times \frac{1}{دب(لا)} - [دب(ب) + (لا) + \frac{1}{2}] \times \frac{1}{دب(ب)}$ (۳)
جو طالب ہندسہ تحلیلہ سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لے گا کہ مساوات (۳) قطع ناقص کے عبادوں کے متعلق ایک مشہور مسئلہ کا حل ہے۔

مثال ۳ — زاویہ ط کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\frac{1}{جم ط} - \frac{1}{جب ط} = \frac{1}{جم ۲ ط} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\frac{1}{جم ط} + \frac{1}{جب ط} = \frac{1}{جم ۲ ط} \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۱) کو جم ط سے اور (۲) کو جب ط سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{4}{1} = \text{جم } ۲ طه + ۲ \text{ جب } طه + \text{جب } ۲ طه$$

$= \text{جم طه} + \text{جيب طه} \text{ جيب طه} = \text{جم طه} + 2 \text{ جيب طه} \text{ جم طه} \dots (3)$

کو جم طہ سے اور (۱) کو جب طہ سے ضرب دو اور
بقیہ کو تین

$\frac{1}{2} = 2 \text{ جب } 2 \text{ طہ جم طہ} - \text{جم } 2 \text{ طہ جب طہ}$

جب ۲ طہ جہ طہ + جب طہ = جب طہ + جب طہ جہ طہ (۴۴)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\text{جب } a + \text{جب } b} \quad \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\text{جب } a + \text{جب } b} \right]$$

$$= (\text{جیب طه} + \text{جم طه}) [\text{جیب طه} + \text{جم طه} + \text{جیب طه جم طه}]$$

۳ = (جب ط + جم ط)

س جب ط + جم ط = $(\frac{1}{1} + \frac{1}{1})$ (۵)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = (\text{جم طہ} - \text{جب طہ}) (1 - 2 \text{ جب طہ جم طہ})$$

۳۔ (مجم طہ - جب طہ) ۳

جَمْ طه - جب طه = $\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)$ (۶)

دلات (۵) اور (۶) کو دوسری قوت پر اٹھانے اور
کرنے سے

$$\frac{x}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2$$

امثلہ نمبری ۴۵

زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$۱۔ \text{اجم طہ} + \text{باجب طہ} = \text{ج اور ب جم طہ} - \text{اجب طہ} = \text{د}$$

$$۲۔ \text{لا} = \text{اجم (طہ - عہ)} \text{ اور } \text{ما} = \text{باجم (طہ - یر)}$$

$$۳۔ \text{اجم ۲ طہ} = \text{باجب طہ اور ج جب ۲ طہ} = \text{د جم طہ}$$

$$۴۔ \text{اجب عہ} - \text{باجم عہ} = \text{باجب طہ اور اجب ۲ عہ} - \text{باجم ۲ طہ} = \text{ا}$$

$$۵۔ \text{لاجب طہ} - \text{ماجم طہ} = \text{لا} + \text{ما} \text{ اور } \text{اجب طہ} + \text{باجم طہ} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

$$۶۔ \frac{\text{لاجم طہ}}{\text{اجب طہ}} + \frac{\text{ماجم طہ}}{\text{باجب طہ}} = ۱$$

$$\text{اور لاجب طہ} - \text{ماجم طہ} = \text{اجب طہ} + \text{باجم طہ}$$

$$۷۔ \text{جب طہ} - \text{جم طہ} = \text{ف}$$

$$\text{اور قم طہ} - \text{جب طہ} = \text{ق}$$

$$۸۔ \text{لا} = \text{اجم طہ} + \text{باجم ۲ طہ} \text{ اور } \text{ما} = \text{اجب طہ} + \text{باجب ۲ طہ}$$

$$۹۔ \text{اگر م} = \text{قم طہ} - \text{جب طہ} \text{ اور } \text{ن} = \text{قط طہ} - \text{جم طہ}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \text{م}^{\frac{۱}{۲}} + \text{ن}^{\frac{۱}{۲}} = (\text{م ن})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$۱۰۔ \text{ثابت کرو کہ معادلات}$$

$$\text{لاجم (طہ + عہ)} + \text{ماجم (طہ + عہ)} = \text{اجب ۲ طہ}$$

$$\text{اور } \text{ماجم (طہ + عہ)} - \text{لاجب (طہ + عہ)} = \text{اجم ۲ طہ}$$

$$\text{کا حاصل استقاط (لاجم عہ + ماجب عہ)} + \text{(لاجب عہ - ماجم عہ)} = (\text{ا م ن})^{\frac{۱}{۲}}$$

طہ اور فہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو۔

۱۱۔ جب ط + جب فہ = ا، جم ط + جم فہ = ب، ط - فہ = ا

۱۲۔ مس ط + مس فہ = لا، مم ط + مم فہ = ما، ط + فہ = ا

۱۳۔ اجم ط + ب جب ط = ج، ب جم فہ + ا جب فہ = د

اور مس ط = ب مس فہ

۱۴۔ جم ط + جم فہ = ا، مم ط + مم فہ = ب

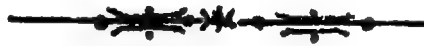
اور قم ط + قم فہ = ج

۱۵۔ ا جب ط = ب جب فہ، اجم ط + ب جم فہ = ج

اور لا = ماس (ط + فہ)

۱۶۔ $\frac{لا}{ا}$ جم ط + $\frac{ب}{ا}$ جب ط = ا، $\frac{لا}{ا}$ جم فہ + $\frac{ب}{ا}$ جب فہ = ا

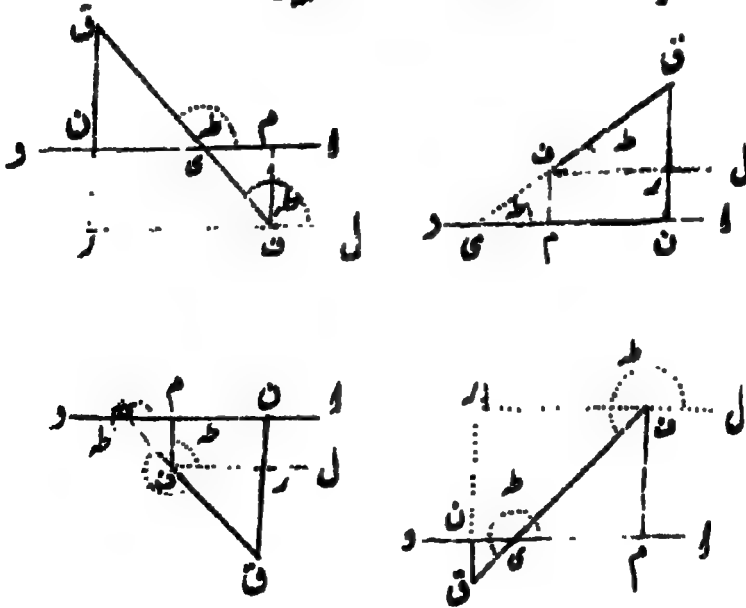
اور $\frac{ا}{ب}$ جب ط = جب فہ + $\frac{ب}{ا}$ جم ط = جم فہ = ج



بابست ویکم

تظیل

۲۵۵۔ فرض کرو کہ ق ن ق ایک مستقیم خط ہے اور اس کے سروں ق اور ق سے ایک ثابت مستقیم خط والا پر عمود نکالے گئے ہیں۔



خط والا پر م ن کو ق کا ظل یا تظیل کہتے ہیں۔

اگر م ن کی سمت وہی ہو جو و لا کی ہے تو اس کو مثبت کہتے ہیں اور اگر مخالف ہو تو منفی۔
 ۲۵۶۔ اگر ایک مستقیم خط ف ن ق اور ثابت مستقیم خط و لا کا درمیانی زاویہ ط ہو تو مثبت کر کے ف ن ق کا ظل و لا پر ف ن ق جم ط کے برابر ہے۔
 ف ن ق کی سمت خواہ کچھ ہی ہو نقطہ ف میں سے ایک مستقیم خط ف ن ، و لا کے متوازی لکھیں اور فرض کر دو کہ یہ خط (جو بشرط ضرورت خارج کیا جاسکتا ہے) ق ن یا ق ن محدودہ کو نقطہ ر پر ملتا ہے۔

تب ہر ایک شکل میں زاویہ ل ف ن ق یا زاویہ ا ی ق دونوں ط کے برابر ہیں۔
 نیز م ن = ف ر = ف ن ق جم ل ف ن ق = ف ن ق جم ط
 بموجب تعریفات دفعہ ۵۶
 اسی طرح سے ف ن ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو و لا پر عمود ہو

= ر ق = ف ن ق جب ل ف ن ق

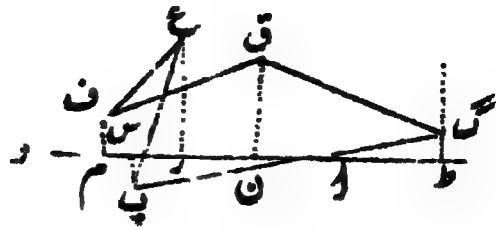
= ف ن ق جب ط

اس لئے معلوم ہوا کہ خط ف ن ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو ف ن ق سے زاویہ ط بناتا ہو ف ن ق جم ط ہے اور اس کا ظل ایک ایسے خط پر

جو مذکورہ بالا خط پر عمود ہوتا ہے جب طہ ہے۔

۲۵۷۔ دفعہ ۵۶ میں جیب اتمام کی تعریف ہم اس طرح کر سکتے تھے۔ اگر وقوع کا ظل خط ابتدائی پر بنایا جائے تو جو نسبت اس ظل کو وقوع سے ہو اسکو زاویہ طہ کی جیب اتمام کہتے ہیں جہاں طہ، وقوع اور ابتدائی خط کا درمیانی زاویہ ہے، اسی طرح سے اگر وقوع کا ظل ایک ایسے خط پر بنایا جائے جو ابتدائی خط پر عمود ہو تو جو نسبت اس ظل کو وقوع سے ہو اس کو زاویہ طہ کی جیب کہتے ہیں۔

جیب اور جیب اتمام کی تعریفات پر اس نقطہ خیال سے دیکھنا بعض اوقات مفید ہوتا ہے۔
۲۵۸۔ اگر ایک ثابت خط واقع ہو اور وقوع کا ظل بنایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ظل ہر ایک ایسے شکستہ (یا غیر مستقیم) خط کے ظلوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جو وقوع سے شروع ہو اور وقوع پر ختم ہوں۔
فرض کرو کہ وقوع پ گ ق ایک شکستہ خط ہے جو وقوع اور ق کو ملاتا ہے۔
خط واقع ہو عمود وقوع م، ق ن، ع ر، پ۔
اور گ ط نکالو۔



ن ع کا ظل م ر ہے اور مثبت ہے
 ع پ کا ظل ر س ہے اور منفی ہے
 ن گ کا ظل س ط ہے اور مثبت ہے
 گ ق کا ظل ط ن ہے اور منفی ہے
 شکستہ خط ن ع پ گ ق کے ظلوں کا مجموعہ

$$= م ر + ر س + س ط + ط ن$$

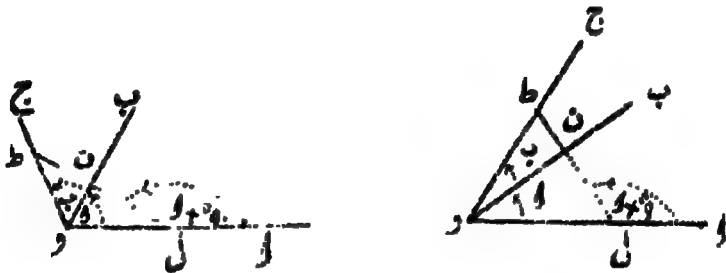
$$= م ر - س ر + س ط - ن ط$$

$$= م س + س ن = م ن$$

سی قسم کا ثبوت تمام صورتوں پر حاوی ہوگا خواہ
 ن اور ق کہیں واقع ہوں اور شکستہ خط خواہ
 کتنے مختلف مستقیم خطوں کو ملانے سے بنا ہو۔
 نتیجہ صریح — اگر کوئی شکستہ خط نقاط ن اور ق
 کو ملائے تو اس کے ظلوں کا مجموعہ ان دو نقطوں
 کو ملانے والے کسی اور شکستہ خط کے ظلوں کے مجموعہ
 کے برابر ہوگا کیونکہ ہر ایک صورت میں مجموعہ
 سطورہ مستقیم خط ن ق کے ظل کے برابر ہوگا۔

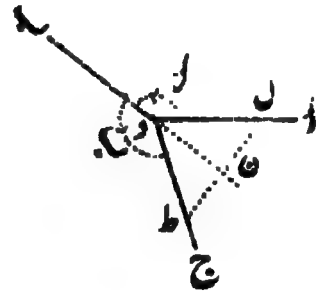
۲۵۹۔ زاویوں کے مسائل جمع تفریق کے ثبوت
(بطریق تطیلی)

فرض کرو کہ \angle اوب زاویہ \angle سے اور \angle ب و ح
زاویہ \angle سے تعبیر ہوتا ہے۔ زاویہ \angle ۔ \angle ب کے
احاطہ کرنے والے خط و ج پر کوئی نقطہ ط مقرر کرو
اور \angle ب پر عمود ط ن نکالو اور اسکو اتنا خارج
کرو کہ \angle کو نقطہ ل پر ملے۔



تب \angle ا ل ط = \angle ل ن و + \angle ا و ب = \angle + \angle ۔
(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جم (\angle + \angle ب) = جم \angle جم ب۔ جب وجیب
و ط \times جم (\angle + \angle ب) = و ط جم \angle و ط
= و ط کا ظل خط و ل پر (دفعہ ۲۵۶)
= و ن کا ظل و ل پر + ن ط کا ظل و ل پر (دفعہ ۵۸)
= و ن جم \angle و ن + ن ط جم \angle ط (دفعہ ۲۵۶)
= و ط جم ب جم \angle + و ط جب ب جم (\angle + \angle)
= و ط (جم \angle جم ب۔ جب \angle جب ب) (دفعہ ۶۶)
و ط پر تقسیم کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا

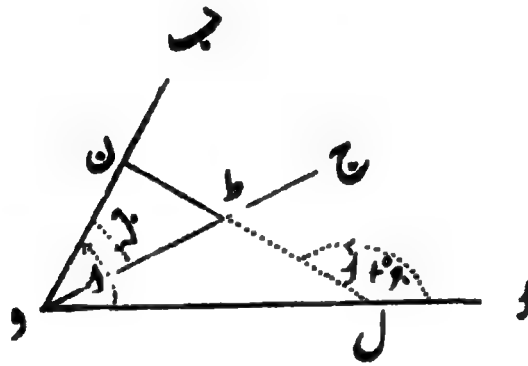
(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جب $(1+B) = \text{جب } (1+B) = \text{جب } (1+B) = \text{جب } (1+B)$
 $\text{ط } \times \text{ جب } (1+B) = \text{وط } \times \text{ جب } 1 \text{ و ط}$
 : و ط کا ظل ایک ایسے خط پر جو 1 پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۶)
 : ون اور ن ط کے ظلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر
 جو 1 پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۸)
 : ون جب $1 + \text{ن ط جب } 1$ جب 1 ط (دفعہ ۲۵۶)
 : و ط جم ب جب $1 + \text{وط جب } 1$ جب 1 (دفعہ ۲۵۶)
 : و ط [جب 1 جم ب + جم 1 جب 1] (دفعہ ۶۶)
 جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے



ن شکلوں سے ظاہر ہے کہ اوپر کا ثبوت ہر حالت
 میں صحیح ہے خواہ احاطہ کر نیوالے خطوط و ب اور
 ج کسی جگہ واقع ہوں۔
 ۲۶۔ زاویوں کے مسئلہ تفریق کی صورت میں
 رض کرو کہ 1 و ب زاویہ 1 ہے اور ب و ج

زاویہ ب ہے جو منفی سمت میں مرسم کیا گیا ہے
یعنی اوج زاویہ ا۔ ب کے برابر ہے، نیز وج
خط و ب سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کے
پہلے اگر مناسب علامت لکھی جائے تو وہ۔ ب کے
برابر ہوتا ہے۔

زاویہ مجوزہ کے احاطہ کرنے والے خط
وج پر کوئی نقطہ ط لو اور و ب پر عمود طن
نکالو اور اس کو اسقدر خارج کرو کہ وہ و ا کو نقطہ
ل پر ملے۔



ثابت کرنا مطلوب ہے کہ جم (ا۔ ب) = جم اجم ب + جب اجم ب
و ط جم (ا۔ ب) = و ط جم اوج
= و ط کا ظل و ا پر
= و ن کا ظل و ا پر + ن ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۸)
= و ن جم ا + ن ط جم (۱ + ۹۰) (دفعہ ۲۵۶)

و ط جم (-ب) جم + و ط جب (-ب) جم (۱+۹۰) (دفعہ ۲۵۶)
و ط جم ب جم + و ط (-ب) جب (-ب) جب (دفعات ۴، ۵، ۶)

و ط [جم + جم ب + جب + جب ب]

ب کے جم (-ب) = جم + جم ب + جب + جب ب
(ثابت کرنا مطلوب ہے جب (-ب) = جب + جم ب - جم + جب ب

جب (-ب) = و ط × جب + و ج

و ط کا نطل ایک ایسے خط پر جو دایرہ نمود (دفعہ ۲۵۶)
و ن اور ن ط کے نطلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر
جو دایرہ نمود ہو (دفعہ ۲۵۸)

و ن جب + و ن ط جب (۱+۹۰) (دفعہ ۲۵۶)

و ط جم (-ب) جب + و ط جب (-ب) جب (۱+۹۰)

(دفعہ ۲۵۶)

و ط جم ب جب - و ط جب ب جم (دفعات ۴، ۵، ۶)

جب (-ب) = جب + جم ب - جم + جب ب

یہ ثبوت ہر حالت میں درست ہیں خواہ احاطہ



لے خطوط و ب اور و ج کسی جگہ پر واقع ہوں۔

متفرق مثالیں

۱۔ اگر ایک زاویہ عہ دو ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کے ماسوں کی نسبت لہ ہو تو ثابت کرو کہ حصوں کا تعداد لا مساوات جب لا $= \frac{لہ}{لہ+۱}$ جب عہ سے حاصل ہوگا۔

۲۔ اگر مس (۲۲ جم طہ) = مم (۲۲ جب طہ) تو ثابت کرو کہ

جم (طہ - $\frac{۲۲}{۲۲}$) = $\frac{۱}{۲۲}$ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{ج-ب}{ج} = \frac{مس-۱}{مس} = \frac{۱}{۲۲}$$

$$\text{اور } \frac{ج-ب}{ج} = \frac{۱+مس-۱}{۱-مس} = \frac{۱}{۲۲}$$

اس میں ا، ب، ج مثلث کے زاوئے ہیں اور ا، ب، ج مثلث کے اضلاع ہیں۔

۳۔ ایک ہوائی جہاز ۱۸ میل فی گھنٹہ کی مستقل رفتار سے

زمین سے ایک مستقل بلندی پر مشرق کی طرف جا رہا تھا۔ کسی خاص وقت ایک شخص نے اسکو ٹھیک اپنے شمال کی طرف

دیکھا، اُس وقت اس کا زاویہ ارتفاع ۹° ۳۰ تھا، اگلے ایک منٹ بعد اس نے جہاز کو ایسی سمت میں دیکھا جو شمال سے

سرق کی طرف کو ۶۲ کا زاویہ بناتی تھی۔ چہاز کی بلندی یافت کرو، نیز چہاز کا زاویہ ارتفاع اس وقت دریافت کرو جب مشاہدہ کرنے والے نے اس کو دوسرے مقام دیکھا۔

— اگر ایک مثلث کے اضلاع ۵۱، ۳۵ اور ۲۶ فٹ ہوں ایک ایسے مثلث کے اضلاع دریافت کرو جس کا قاعدہ فٹ ہو اور جس کا رقبہ اور مجموعہ اضلاع وہی ہو جو بے مثلث کا ہے۔
— ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\frac{1 + \lambda}{2 + \lambda}} = \text{جب } m = 1$$

— زاویہ طہ کو مساوات

جب (طہ + عہ) = ۱، جم (طہ + بہ) = با سے ساقط کرو
— ثابت کرو کہ خواہ زاویہ طہ کوئی قیمت اختیار کرے
۱۔ جب طہ + با جب طہ جم طہ + ج جم طہ

$$\frac{1}{p} + \frac{1+j}{p} \sqrt{\frac{1+j}{1-j}} \text{ اور } \frac{1}{p} - \frac{1+j}{p} \sqrt{\frac{1+j}{1-j}} \text{ درمیان واقع ہوگا۔}$$



— اگر جب لا = ک جب (۱ - لا)

تو ثابت کرو کہ $\text{مس} (۱۱ - \frac{1}{۴}) = \frac{1}{۴} \text{ک} - \frac{1}{۴} \text{مس}$
 اور جدولوں کی مدد سے مساوات کو حل کرو جبکہ $\text{ک} = ۳$
 اور $۱ = ۵۰$

۱۰۔ $\text{مس} ۳ + \text{مس} (۳ + \frac{\pi}{۳}) + \text{مس} (۳ + \frac{\pi}{۳})$ کو
 مس ۳ طہ کی رقوم میں بیان کرو

اسطرح سے یا کسی اور طرح سے مساوات ذیل کو حل کرو

$\text{مس} ۳ + \text{مس} (۳ + \frac{\pi}{۳}) + \text{مس} (۳ + \frac{\pi}{۳}) = ۳$

۱۱۔ اگر کسی مثلث ا ب ج میں $\frac{1}{۴}$ مس، $\frac{1}{۴}$ مس اور $\frac{1}{۴}$ مس
 سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جم ۱، جم ۲، جم ۳
 بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۱۲۔ ایک شخص نے سمندر کے کنارے کھڑے ہو کر
 دو لنگروں کو ایک ہی سیدھ میں دیکھا، انکو ملائیوالا
 خط کنارے سے زاویہ عہ بناتا تھا، جب وہ سمندر کے
 کنارے فاصلہ ۱ چلا تو اُس نے دیکھا کہ لنگروں کے
 محاذی اسکی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، فاصلہ ب آگے
 جانے پر اس نے دیکھا کہ دو بارہ اسکی آنکھ پر زاویہ عہ
 بنتا ہے، ثابت کرو کہ لنگروں کا درمیانی فاصلہ

$(\frac{1}{۴} + \frac{1}{۴})$ قط عہ - $\frac{1}{۴} (1 + 1)$ جم عہ ہے -

اس سوال میں فرض کرو کہ کنارہ سیدھا ہے اور سطح
 سمندر سے آنکھ کی اونچائی صفر ہے

— ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے سینقت
کے بیرونی دائرہ کو نقاط د، ع، ف پر بالترتیب
نکرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کے رقبہ کو
ت ا ب ج کے رقبہ کے ساتھ ۵:۲ ہے۔
— ایک منتظم خمس کے متبادل زاویوں کو طان
ایک اور منتظم خمس پیدا ہوتی ہے، ان کے رقبوں کی
نسبت دریافت کرو۔

— اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ تو
ت کرو کہ $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ ہے۔

— اگر $1 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$1 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

اور $1 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
ت کرو کہ $1 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

—

— اگر لا کی قیمت حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

میں جو زاوے اکٹراؤ خط و ب سے بنائے انکی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے دو جہاز سطح سمندر پر نظر پڑے، ایک کا زاویہ انخفاض 45° تھا اور اسکی سمت، مشرق سے شمال کی طرف کو 30° کا زاویہ بناتی تھی دوسرے کا زاویہ انخفاض 60° تھا اور اسکی سمت، مشرق سے جنوب کی طرف کو 75° کا زاویہ بناتی تھی، جہازوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو، نیز یہ بھی معلوم کرو کہ اگر کسی ایک جہاز پر کھڑے ہو کر دوسرے جہاز کی طرف دیکھا جائے تو اسکی جہت کیا ہوگی

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے اور مثلث کے کسی دو جانبی دائروں کے مرکروں میں سے جو دائرہ گزرتا ہے اس کا نصف قطر مثلث کے بیرونی دائرہ کے قطر کے برابر ہوتا ہے۔



۲۵۔ اگر $\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } a = 3 \text{ جب } \frac{a^2 + 3}{a^2 + 1}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

جب $a = 3$ جب $a = (b - c) +$ دو متساوی جملے

مس (1/2 جب 1/2 + 1/2 جم 1/2 + 1/2)

۳۱۔ ع اور ب کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

جیب عم + جیب بہ = ل

$$m = \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2$$

اور $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$

۳۲۔ عمل ترمیمی سے دریافت کرو کہ مساوات

ج' مس ۱۱ = اکی کتنی قیمتیں . اور ۲۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ؟



۴۴۔ ثوابت کر دے

جم ۲ = جب ۲ + جم (ع + ی) جب ع جب ی + جم ۲ (ع + ی)

۳۴- ثابت کرو کہ جب $\frac{\pi}{14}$ جب $\frac{\pi^3}{14}$ جب $\frac{\pi^5}{14}$ $\frac{1}{8}$

۳۵۔ معاولات ذیل کو حل کرو۔

۳۱ جب ۱۲ = جب ۲۲

$$f_1 \text{ جب } 1 + \text{جب } b = \frac{1}{f} (1 - f_1)$$

۳۶۔ اگر کسی مثلث کے زاویوں کے ماس سلسلہ حبابیہ

میں ہوں تو ثابت کرو کہ ضلعوں کے مربعوں کی باہمی

نسبتیں $\lambda^2 : (\lambda^2 + 9) : (\lambda^2 + 3\lambda) : 9 : (\lambda^2 + \lambda)$ ہیں

جہاں لا بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا ماس ہے۔

۳۷۔ ایک خط مستقیم پر تین نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک ہی سطح افقی میں ہیں، 'ا' ب = ۱۰۰ گز اور 'ب' ج = ۵۰ گز، ایک غبارہ کے ارتقاعی زاوے نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج' سے ایک ہی وقت میں 'ع'، 'ب'، 'ج' دیکھے گئے ہیں، ثابت کرو کہ غبارہ کی بلندی (ب) گزوں میں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$ب = (۳م' ع + ۲م' ج - ۵م' ب) = ۵۰۰$$

۳۸۔ اگر کسی مثلث کے نقاط راس سے عمودن 'ق'، 'ر' ایک ایسے خط مستقیم پر کھینچے جائیں جو مثلث کے اضلاع مدودہ کو 'د'، 'ع'، 'پ' پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$(ق-ن)(ق-ر) + (ب-ق)(ق-ر) + (ج-ق)(ق-ر) = (ق-ر)(ق-ن)$$

= ۴۵ جہاں ۵ مثلث کا رقبہ ہے

$$\frac{۵}{۲}$$

نیز ثابت کرو کہ ع پ = (ق-ن)(ق-ر)

۳۹۔ ایک ن اضلاع کی منظم کثیر الاضلاع کے ضلع کا طول ۲ ہے اور کثیر الاضلاع کا رقبہ ۱ ہے، اگر ایک اندر بنے ہوئے اور گرد بنے ہوئے دائروں کے رقبے بالترتیب 'ا' اور 'ب' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱ - ۱ = ۱ \text{ اور } ۱ - ۱ = ۱$$

۴۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۱، ۵۶، ۶۴ ہیں، ثابت کرو کہ اس کے ایک زاویہ اور زاویہ قائمہ کا فرق ایک دقیقہ سے کم ہے۔



۴۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2 \text{ جب } 1 - 2 \text{ جب } 1}{\text{جب } (1 - 1) + \text{جم } 1 - \text{جم } 1} = \frac{\text{جم } 1}{1 - \text{جب } 1} + \frac{1 + \text{جب } 1}{\text{جم } 1}$$

— ثابت کر دے

$$۲ \text{ جم طه مم به} = \text{مم عه} + \text{مم جہ}$$

۴۵۔ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے داخلی منصف اضلاع کو نقاط د، ع، ن پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ن کا رقبہ

$$۲ \Delta \text{ ا ب ج} = \frac{(\text{ب} + \text{ج})(\text{ج} + \text{ا})(\text{ا} + \text{ب})}{۴}$$

۴۶۔ اگر $\text{جم ا لا} + \text{جم ا ما} + \text{جم ا ی} = \pi$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = ۱$$

۴۷۔ زاویہ طه کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\text{له جم ۲ طه} = \text{جم (طه + عه)}$$

$$\text{اور له جب ۲ طه} = ۲ \text{ جب (طه + عه)}$$

۴۸۔ ایک دائرہ کا قطر ۶ انچ ہے، اسکی ایک قوس اور قوس کے وتر کا مجموعہ ۸ انچ ہے، قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس کے دریافت کرنے کے لئے ایک مساوات مرتب کرو اور مساوات کو ترسیبی عمل سے حل کرو۔



۴۹۔ مختصر کرو

$$\left[\frac{\text{جب (عہ + جہ)}}{\text{جم (عہ - جہ)}} - \frac{\text{جب (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ - بہ)}} \right] + \left\{ \frac{\text{جم (عہ + جہ)}}{\text{جم (عہ - جہ)}} - \frac{\text{جم (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ - بہ)}} \right\}$$

۵۰۔ ثابت کرو کہ

جب $۱۲^\circ + ۱۲^\circ + ۹۱^\circ + ۳۹^\circ + ۳۸^\circ = ۱ + ۱ + ۹۲^\circ + ۱۸^\circ$
 ۵۱۔ ایک مثلث کے اضلاع α ، β ، γ ہیں اس مثلث کے اندر ایک متشابه مثلث بنایا گیا ہے جس کے اضلاع $m\alpha$ ، $m\beta$ ، $m\gamma$ ہیں، اگر اضلاع α اور $m\alpha$ کا درمیانی زاویہ θ ہو تو ثابت کرو کہ $m^2 \cos \theta = 1$

۵۲۔ ایک پہاڑ کی چوٹی کا دو مقامات A اور B سے جو ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں مشاہدہ کیا گیا ہے، مقام A پہاڑی کے ٹھیک جنوب میں ہے اور B سے مقام B کی سمت، شمال مشرق ہے، اگر مقامات A اور B سے چوٹی کے ارتفاعی زاوے 30° اور 45° ہوں تو پہاڑی سے مقام B کی قطبی جہت دریافت کرو۔

۵۳۔ ایک مثلث ABC کے بیرونی دائرہ کا مرکز O ہے، دائرہ کے نقاط B اور C پر کے مماس نقطہ P پر ملتے ہیں، اگر زاویہ $\angle POB$ ، θ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

$$2 \cos \theta = m \cos B + m \cos C$$

۵۴۔ ہندسی عمل سے $\cos(\frac{\pi}{2} - A)$ کی قیمتوں کی تعداد دریافت کرو، نیز ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب $1 - (-1)^n$ ہے

۵۵۔ ثابت کرو کہ جملہ $\cos(2A + 2B)$ کی قیمت $\cos(2A - 2B)$

سس (۲ - ۱) اور سس (۲ + ۱) کے درمیان نہیں واقع ہو سکتی۔

۵۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 (\text{ط} + \frac{\text{ط}^2}{\text{ج}}) + \text{جم}^2 (\text{ط} + \frac{\text{ط}^2}{\text{ج}}) + \dots + \text{ن}^2 \text{قوت تک} = \frac{\text{ن}^3}{۸}$$



۵۷۔ اگر { جب (ع - ب) + جم (ع + ب) } جب ب = جم ع جب ب جب (ع + ب)

تو ثابت کرو کہ سس ع = سس ب { (۲ جم ب - ۱) - ۱ } اس میں

ع اور ب میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔

۵۸۔ لاکھ وہ سب قیمتیں دریافت کرو جو مساوات ذیل کو پورا کریں

سس (لا + ب) سس (لا + ج) سس (لا + ع) سس (لا + ح) سس (لا + ب)

۵۹۔ مثلث ا ب ج میں زاویہ د سے ضلع ب ج پر جو عمود

ٹکالا جائے اس کا پائیں د ہے، اگر ب ج = ۱۱ فٹ،

ب = ۳ م اور د = ۴ = ج = ۶۴ تو د کا

طول دریافت کرو

۶۰۔ ایک بنیادی خط پر تین نقاط ا، ب، ج سے ایک

پہاڑ کی چوٹی کے زوایا ارتفاع بالترتیب ع، ب، ج، مشاہد
کئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی
(-اب × بج × ج) (بج × ع + ج × ع + ب × ع) ہے، اس
جگہ میں خطوں کے رخوں کی علامات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔
۶۱۔ اگر مثلث ابج کے زاویہ ج کا منصف ضلع
اب کو د پر اور بیرونی دائرہ کو ع پر قطع کرے
تو ثابت کرو کہ

$$ج : ع :: د : ع = (و + ب) : ج$$

جہاں و، ب، ج، مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں
۶۲۔ یہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$1 مس ط + ب مم 2 ط = ج$$

$$1 مم ط - ب مس 2 ط = ج$$

۶۳۔ عمل تریسی سے صحیح طور پر نصف درجہ تک

مسوات مم ۱ = جم ۲ کی تقریبی قیمت دریافت کرو

۶۴۔ ایک شخص ایک ٹینس کورٹ کے قائم الزاویہ

کونوں کو بنانے میں تین رسیاں استعمال کرتا ہے، ایک

طول بالترتیب ۳ گز، ۴ گز، ۵ گز، ۱۰ فٹ (۱۰ انچ ہیں)

کورٹ کے زاویوں کی پیمائش میں جو غلطیاں اسطرح

واقع ہوتی ہیں ان کی مقدار میں دریافت کرو۔

۶۵۔ آر ن جب^۲ (ع+ب) = جب^۲ ع + جب^۲ ب - ۲ جب ع جب ب جم (ع-ب)

تو ثابت کرو کہ مس ع = $\frac{1 \pm \frac{n}{n}}{1 \mp \frac{n}{n}}$ مس ب

۶۶۔ اگر جملہ $\frac{1 \text{ جم (ط+ع) + ب جب (ط+ب) } (ب-ع) \text{ کی قیمت}}{1 \text{ جب (ط+ع) + ب جب (ط+ب) } (ب-ع)}$

ط کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ

۱۔ ب ب ب = (ا ب - ا ب) جب (ع-ب)

۶۷۔ ثابت کرو کہ ط کی وہ قیمتیں جو شرائط مساوات

جب ۲ ط جم (ع-ب) - جب ۲ ع جم (ب+ط) - جب ۲ ب جب (ا+ع+ط) = ۰

کو پورا کرتی ہیں جملات $(1+n^2) \frac{1}{p} - \frac{1}{p} - \text{بہ اور } n + \pi + \text{عہ میں}$

شامل ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۶۸۔ مثلث ا ب ج کے وسطانیات ایک دوسرے

سے زاوے عہ بہ بے بناتے ہیں ثابت کرو کہ

مم ع + مم ب + مم جہ + مم ا + مم ب + مم ج = ۰

۶۹۔ ایک دریا کے کنارے دو مقامات کا باہمی فاصلہ

۱۲ ہے، مقابل کے کنارے پر ایک برج ہے اور ہر دو

مقامات سے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع عہ ہے، ان مقامات

کے عین وسط میں ایک مقام ہے اگر اس پر کھڑے ہو کر

دیکھا جائے تو چوٹی کا زاویہ ارتفاع بہ دکھائی دیتا ہے،

برج کی بلندی اور دریا کا عرض ا، عہ بہ کی رقوم میں

دریافت کرو۔

اگر $1 = 100$ گز، $ع = \frac{1}{2} \times 100$ اور $ب = 30$ تو ثابت کرو کہ
برج کی بلندی 150 میٹر ہے۔

۷۰۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے نقاط قاس
اضلاع $باج$ ، $ج د$ ، $د ب$ کے ساتھ بالترتیب $د$ ، $ع$ ، $ف$ ہوں
اور اگر $د$ ، $ب$ ، $ع$ ، $ج$ ، $د$ کے مرتبے سلسلہ حسابیہ ہیں
ہوں تو مثلث کے اضلاع سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔

۷۱۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع اور ایک منظم
مسج دونوں ایک دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں ثابت
کرو کہ اگر مثلث کے نصف ضلع کے طول سے مسج
کے ایک ضلع کے طول کو نفی کر دیں تو حاصل دائرہ کے
نصف قطر کے $\frac{1}{2}$ ویں حصہ سے کم ہوگا۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ مقدار $جم ط$ ، $جم ط + جب ط$ ، $جب ط + جب ع$ ، $جم ع$
کی قیمت $1 + جب ع$ اور $1 + جب ع$ کے درمیان واقع ہوتی



۷۳۔ $ا$ جب $ع$ جب $ب$ جب $ج$ جب $د$ کو آٹھ بیوب تمام
کے سلسلے میں بیان کرو

۷۴۔ اگر $جب د = \frac{جم ۲ ع ۲ جم ۲ ب}{جم (ع + ب)}$ تو ثابت کرو

$$ک = \frac{س ۲ - \frac{ن}{۲}}{س (س \pm \frac{\pi}{۲})} = \frac{س (س \pm \frac{\pi}{۲})}{س (س \pm \frac{\pi}{۲})}$$

۷۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ AO ، مقابل کا زاویہ A اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب k دیا ہوا ہے، مثلث کو حل کرو اور ثابت کرو کہ ان اجزاء سے کوئی مثلث نہیں بن سکتا اگر $k > 4$ جب $\frac{1}{4}$

۷۶۔ پہاڑ کی ایک جانب میں دو نقاط F اور C میں، سطح افقی کے ایک نقطہ D سے ان نقاط کے ارتفاعی زاویے 38° اور 25° مشاہدہ کئے گئے ہیں، پہاڑ کے پائیں A کا فاصلہ D سے 500 گز ہے اور طول $AC = 320$ گز، تمام شکل سطح عمودی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ فاصلہ FD تقریباً 329 گز ہے، پہاڑ کی سلامی (دھلانج) دریافت کرو۔

۷۷۔ مثلث ABC کے جانبی دائروں کے مرکزے E ، F ، G ہیں اور مثلثات BAE ، CBF ، ACG اور DEF کے اندرونی دائروں کے نصف قطر $صم$ ، $صم$ ، $صم$ ہیں ثابت کرو کہ

$صم : صم = جب \frac{1}{p} : جب \frac{1}{p} : جب \frac{1}{p}$

۷۸۔ دو دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ 1 ہے، دائرے ایک سطح افقی میں اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ $1/2$ ہے، اگر RS کے ایک طبقہ کو کس کر دائروں کے گرد اس طرح پیٹ دیا جائے کہ وہ دائروں کے درمیان آٹھ کی شکل

تو ثابت کرو کہ $مم طه = مم ا + مم ب + مم ج$
 ۸۴۔ ایک جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک
 بندرگاہ کی طرف جا رہا تھا، مقام ب سے جو ا کے
 ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلہ پر تھا جہاز
 کی جہت مشاہدہ کی گئی اور وہ مشرق سے شمال کی جانب
 میں ۴۲° کا زاویہ بناتی تھی، پھر گھنٹہ کے بعد جہاز
 بندرگاہ میں پہنچ گیا، اول مشاہدہ کے وقت جہاز کا
 فاصلہ مقام ب سے دریافت کرو۔

۸۵۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں
 کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کے

اندرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{مم ا + مم ب + مم ج}{۲}$ ہے۔
 $\frac{مم ا + مم ب + مم ج}{۲}$

۸۶۔ ایک ن اضلاع کی کثیرالاضلاع ایک دائرہ کے
 اندر بنی ہوئی ہے اور اس کے اضلاع کے محاذی مرکز
 پر زاوے ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۲، ۴۴، ۴۶، ۴۸، ۵۰، ۵۲، ۵۴، ۵۶، ۵۸، ۶۰، ۶۲، ۶۴، ۶۶، ۶۸، ۷۰، ۷۲، ۷۴، ۷۶، ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۴، ۸۶، ۸۸، ۹۰، ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۶، ۱۰۸، ۱۱۰، ۱۱۲، ۱۱۴، ۱۱۶، ۱۱۸، ۱۲۰، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۳۰، ۱۳۲، ۱۳۴، ۱۳۶، ۱۳۸، ۱۴۰، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۶، ۱۴۸، ۱۵۰، ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۵۸، ۱۶۰، ۱۶۲، ۱۶۴، ۱۶۶، ۱۶۸، ۱۷۰، ۱۷۲، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۷۸، ۱۸۰، ۱۸۲، ۱۸۴، ۱۸۶، ۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۲، ۱۹۴، ۱۹۶، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۰۸، ۲۱۰، ۲۱۲، ۲۱۴، ۲۱۶، ۲۱۸، ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۲۴، ۲۲۶، ۲۲۸، ۲۳۰، ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۴۰، ۲۴۲، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۵۰، ۲۵۲، ۲۵۴، ۲۵۶، ۲۵۸، ۲۶۰، ۲۶۲، ۲۶۴، ۲۶۶، ۲۶۸، ۲۷۰، ۲۷۲، ۲۷۴، ۲۷۶، ۲۷۸، ۲۸۰، ۲۸۲، ۲۸۴، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۹۰، ۲۹۲، ۲۹۴، ۲۹۶، ۲۹۸، ۳۰۰، ۳۰۲، ۳۰۴، ۳۰۶، ۳۰۸، ۳۱۰، ۳۱۲، ۳۱۴، ۳۱۶، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۲۲، ۳۲۴، ۳۲۶، ۳۲۸، ۳۳۰، ۳۳۲، ۳۳۴، ۳۳۶، ۳۳۸، ۳۴۰، ۳۴۲، ۳۴۴، ۳۴۶، ۳۴۸، ۳۵۰، ۳۵۲، ۳۵۴، ۳۵۶، ۳۵۸، ۳۶۰، ۳۶۲، ۳۶۴، ۳۶۶، ۳۶۸، ۳۷۰، ۳۷۲، ۳۷۴، ۳۷۶، ۳۷۸، ۳۸۰، ۳۸۲، ۳۸۴، ۳۸۶، ۳۸۸، ۳۹۰، ۳۹۲، ۳۹۴، ۳۹۶، ۳۹۸، ۴۰۰، ۴۰۲، ۴۰۴، ۴۰۶، ۴۰۸، ۴۱۰، ۴۱۲، ۴۱۴، ۴۱۶، ۴۱۸، ۴۲۰، ۴۲۲، ۴۲۴، ۴۲۶، ۴۲۸، ۴۳۰، ۴۳۲، ۴۳۴، ۴۳۶، ۴۳۸، ۴۴۰، ۴۴۲، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۴۸، ۴۵۰، ۴۵۲، ۴۵۴، ۴۵۶، ۴۵۸، ۴۶۰، ۴۶۲، ۴۶۴، ۴۶۶، ۴۶۸، ۴۷۰، ۴۷۲، ۴۷۴، ۴۷۶، ۴۷۸، ۴۸۰، ۴۸۲، ۴۸۴، ۴۸۶، ۴۸۸، ۴۹۰، ۴۹۲، ۴۹۴، ۴۹۶، ۴۹۸، ۵۰۰، ۵۰۲، ۵۰۴، ۵۰۶، ۵۰۸، ۵۱۰، ۵۱۲، ۵۱۴، ۵۱۶، ۵۱۸، ۵۲۰، ۵۲۲، ۵۲۴، ۵۲۶، ۵۲۸، ۵۳۰، ۵۳۲، ۵۳۴، ۵۳۶، ۵۳۸، ۵۴۰، ۵۴۲، ۵۴۴، ۵۴۶، ۵۴۸، ۵۵۰، ۵۵۲، ۵۵۴، ۵۵۶، ۵۵۸، ۵۶۰، ۵۶۲، ۵۶۴، ۵۶۶، ۵۶۸، ۵۷۰، ۵۷۲، ۵۷۴، ۵۷۶، ۵۷۸، ۵۸۰، ۵۸۲، ۵۸۴، ۵۸۶، ۵۸۸، ۵۹۰، ۵۹۲، ۵۹۴، ۵۹۶، ۵۹۸، ۶۰۰، ۶۰۲، ۶۰۴، ۶۰۶، ۶۰۸، ۶۱۰، ۶۱۲، ۶۱۴، ۶۱۶، ۶۱۸، ۶۲۰، ۶۲۲، ۶۲۴، ۶۲۶، ۶۲۸، ۶۳۰، ۶۳۲، ۶۳۴، ۶۳۶، ۶۳۸، ۶۴۰، ۶۴۲، ۶۴۴، ۶۴۶، ۶۴۸، ۶۵۰، ۶۵۲، ۶۵۴، ۶۵۶، ۶۵۸، ۶۶۰، ۶۶۲، ۶۶۴، ۶۶۶، ۶۶۸، ۶۷۰، ۶۷۲، ۶۷۴، ۶۷۶، ۶۷۸، ۶۸۰، ۶۸۲، ۶۸۴، ۶۸۶، ۶۸۸، ۶۹۰، ۶۹۲، ۶۹۴، ۶۹۶، ۶۹۸، ۷۰۰، ۷۰۲، ۷۰۴، ۷۰۶، ۷۰۸، ۷۱۰، ۷۱۲، ۷۱۴، ۷۱۶، ۷۱۸، ۷۲۰، ۷۲۲، ۷۲۴، ۷۲۶، ۷۲۸، ۷۳۰، ۷۳۲، ۷۳۴، ۷۳۶، ۷۳۸، ۷۴۰، ۷۴۲، ۷۴۴، ۷۴۶، ۷۴۸، ۷۵۰، ۷۵۲، ۷۵۴، ۷۵۶، ۷۵۸، ۷۶۰، ۷۶۲، ۷۶۴، ۷۶۶، ۷۶۸، ۷۷۰، ۷۷۲، ۷۷۴، ۷۷۶، ۷۷۸، ۷۸۰، ۷۸۲، ۷۸۴، ۷۸۶، ۷۸۸، ۷۹۰، ۷۹۲، ۷۹۴، ۷۹۶، ۷۹۸، ۸۰۰، ۸۰۲، ۸۰۴، ۸۰۶، ۸۰۸، ۸۱۰، ۸۱۲، ۸۱۴، ۸۱۶، ۸۱۸، ۸۲۰، ۸۲۲، ۸۲۴، ۸۲۶، ۸۲۸، ۸۳۰، ۸۳۲، ۸۳۴، ۸۳۶، ۸۳۸، ۸۴۰، ۸۴۲، ۸۴۴، ۸۴۶، ۸۴۸، ۸۵۰، ۸۵۲، ۸۵۴، ۸۵۶، ۸۵۸، ۸۶۰، ۸۶۲، ۸۶۴، ۸۶۶، ۸۶۸، ۸۷۰، ۸۷۲، ۸۷۴، ۸۷۶، ۸۷۸، ۸۸۰، ۸۸۲، ۸۸۴، ۸۸۶، ۸۸۸، ۸۹۰، ۸۹۲، ۸۹۴، ۸۹۶، ۸۹۸، ۹۰۰، ۹۰۲، ۹۰۴، ۹۰۶، ۹۰۸، ۹۱۰، ۹۱۲، ۹۱۴، ۹۱۶، ۹۱۸، ۹۲۰، ۹۲۲، ۹۲۴، ۹۲۶، ۹۲۸، ۹۳۰، ۹۳۲، ۹۳۴، ۹۳۶، ۹۳۸، ۹۴۰، ۹۴۲، ۹۴۴، ۹۴۶، ۹۴۸، ۹۵۰، ۹۵۲، ۹۵۴، ۹۵۶، ۹۵۸، ۹۶۰، ۹۶۲، ۹۶۴، ۹۶۶، ۹۶۸، ۹۷۰، ۹۷۲، ۹۷۴، ۹۷۶، ۹۷۸، ۹۸۰، ۹۸۲، ۹۸۴، ۹۸۶، ۹۸۸، ۹۹۰، ۹۹۲، ۹۹۴، ۹۹۶، ۹۹۸، ۱۰۰۰، ۱۰۰۲، ۱۰۰۴، ۱۰۰۶، ۱۰۰۸، ۱۰۱۰، ۱۰۱۲، ۱۰۱۴، ۱۰۱۶، ۱۰۱۸، ۱۰۲۰، ۱۰۲۲، ۱۰۲۴، ۱۰۲۶، ۱۰۲۸، ۱۰۳۰، ۱۰۳۲، ۱۰۳۴، ۱۰۳۶، ۱۰۳۸، ۱۰۴۰، ۱۰۴۲، ۱۰۴۴، ۱۰۴۶، ۱۰۴۸، ۱۰۵۰، ۱۰۵۲، ۱۰۵۴، ۱۰۵۶، ۱۰۵۸، ۱۰۶۰، ۱۰۶۲، ۱۰۶۴، ۱۰۶۶، ۱۰۶۸، ۱۰۷۰، ۱۰۷۲، ۱۰۷۴، ۱۰۷۶، ۱۰۷۸، ۱۰۸۰، ۱۰۸۲، ۱۰۸۴، ۱۰۸۶، ۱۰۸۸، ۱۰۹۰، ۱۰۹۲، ۱۰۹۴، ۱۰۹۶، ۱۰۹۸، ۱۱۰۰، ۱۱۰۲، ۱۱۰۴، ۱۱۰۶، ۱۱۰۸، ۱۱۱۰، ۱۱۱۲، ۱۱۱۴، ۱۱۱۶، ۱۱۱۸، ۱۱۲۰، ۱۱۲۲، ۱۱۲۴، ۱۱۲۶، ۱۱۲۸، ۱۱۳۰، ۱۱۳۲، ۱۱۳۴، ۱۱۳۶، ۱۱۳۸، ۱۱۴۰، ۱۱۴۲، ۱۱۴۴، ۱۱۴۶، ۱۱۴۸، ۱۱۵۰، ۱۱۵۲، ۱۱۵۴، ۱۱۵۶، ۱۱۵۸، ۱۱۶۰، ۱۱۶۲، ۱۱۶۴، ۱۱۶۶، ۱۱۶۸، ۱۱۷۰، ۱۱۷۲، ۱۱۷۴، ۱۱۷۶، ۱۱۷۸، ۱۱۸۰، ۱۱۸۲، ۱۱۸۴، ۱۱۸۶، ۱۱۸۸، ۱۱۹۰، ۱۱۹۲، ۱۱۹۴، ۱۱۹۶، ۱۱۹۸، ۱۲۰۰، ۱۲۰۲، ۱۲۰۴، ۱۲۰۶، ۱۲۰۸، ۱۲۱۰، ۱۲۱۲، ۱۲۱۴، ۱۲۱۶، ۱۲۱۸، ۱۲۲۰، ۱۲۲۲، ۱۲۲۴، ۱۲۲۶، ۱۲۲۸، ۱۲۳۰، ۱۲۳۲، ۱۲۳۴، ۱۲۳۶، ۱۲۳۸، ۱۲۴۰، ۱۲۴۲، ۱۲۴۴، ۱۲۴۶، ۱۲۴۸، ۱۲۵۰، ۱۲۵۲، ۱۲۵۴، ۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۶۲، ۱۲۶۴، ۱۲۶۶، ۱۲۶۸، ۱۲۷۰، ۱۲۷۲، ۱۲۷۴، ۱۲۷۶، ۱۲۷۸، ۱۲۸۰، ۱۲۸۲، ۱۲۸۴، ۱۲۸۶، ۱۲۸۸، ۱۲۹۰، ۱۲۹۲، ۱۲۹۴، ۱۲۹۶، ۱۲۹۸، ۱۳۰۰، ۱۳۰۲، ۱۳۰۴، ۱۳۰۶، ۱۳۰۸، ۱۳۱۰، ۱۳۱۲، ۱۳۱۴، ۱۳۱۶، ۱۳۱۸، ۱۳۲۰، ۱۳۲۲، ۱۳۲۴، ۱۳۲۶، ۱۳۲۸، ۱۳۳۰، ۱۳۳۲، ۱۳۳۴، ۱۳۳۶، ۱۳۳۸، ۱۳۴۰، ۱۳۴۲، ۱۳۴۴، ۱۳۴۶، ۱۳۴۸، ۱۳۵۰، ۱۳۵۲، ۱۳۵۴، ۱۳۵۶، ۱۳۵۸، ۱۳۶۰، ۱۳۶۲، ۱۳۶۴، ۱۳۶۶، ۱۳۶۸، ۱۳۷۰، ۱۳۷۲، ۱۳۷۴، ۱۳۷۶، ۱۳۷۸، ۱۳۸۰، ۱۳۸۲، ۱۳۸۴، ۱۳۸۶، ۱۳۸۸، ۱۳۹۰، ۱۳۹۲، ۱۳۹۴، ۱۳۹۶، ۱۳۹۸، ۱۴۰۰، ۱۴۰۲، ۱۴۰۴، ۱۴۰۶، ۱۴۰۸، ۱۴۱۰، ۱۴۱۲، ۱۴۱۴، ۱۴۱۶، ۱۴۱۸، ۱۴۲۰، ۱۴۲۲، ۱۴۲۴، ۱۴۲۶، ۱۴۲۸، ۱۴۳۰، ۱۴۳۲، ۱۴۳۴، ۱۴۳۶، ۱۴۳۸، ۱۴۴۰، ۱۴۴۲، ۱۴۴۴، ۱۴۴۶، ۱۴۴۸، ۱۴۵۰، ۱۴۵۲، ۱۴۵۴، ۱۴۵۶، ۱۴۵۸، ۱۴۶۰، ۱۴۶۲، ۱۴۶۴، ۱۴۶۶، ۱۴۶۸، ۱۴۷۰، ۱۴۷۲، ۱۴۷۴، ۱۴۷۶، ۱۴۷۸، ۱۴۸۰، ۱۴۸۲، ۱۴۸۴، ۱۴۸۶، ۱۴۸۸، ۱۴۹۰، ۱۴۹۲، ۱۴۹۴، ۱۴۹۶، ۱۴۹۸، ۱۵۰۰، ۱۵۰۲، ۱۵۰۴، ۱۵۰۶، ۱۵۰۸، ۱۵۱۰، ۱۵۱۲، ۱۵۱۴، ۱۵۱۶، ۱۵۱۸، ۱۵۲۰، ۱۵۲۲، ۱۵۲۴، ۱۵۲۶، ۱۵۲۸، ۱۵۳۰، ۱۵۳۲، ۱۵۳۴، ۱۵۳۶، ۱۵۳۸، ۱۵۴۰، ۱۵۴۲، ۱۵۴۴، ۱۵۴۶، ۱۵۴۸، ۱۵۵۰، ۱۵۵۲، ۱۵۵۴، ۱۵۵۶، ۱۵۵۸، ۱۵۶۰، ۱۵۶۲، ۱۵۶۴، ۱۵۶۶، ۱۵۶۸، ۱۵۷۰، ۱۵۷۲، ۱۵۷۴، ۱۵۷۶، ۱۵۷۸، ۱۵۸۰، ۱۵۸۲، ۱۵۸۴، ۱۵۸۶، ۱۵۸۸، ۱۵۹۰، ۱۵۹۲، ۱۵۹۴، ۱۵۹۶، ۱۵۹۸، ۱۶۰۰، ۱۶۰۲، ۱۶۰۴، ۱۶۰۶، ۱۶۰۸، ۱۶۱۰، ۱۶۱۲، ۱۶۱۴، ۱۶۱۶، ۱۶۱۸، ۱۶۲۰، ۱۶۲۲، ۱۶۲۴، ۱۶۲۶، ۱۶۲۸، ۱۶۳۰، ۱۶۳۲، ۱۶۳۴، ۱۶۳۶، ۱۶۳۸، ۱۶۴۰، ۱۶۴۲، ۱۶۴۴، ۱۶۴۶، ۱۶۴۸، ۱۶۵۰، ۱۶۵۲، ۱۶۵۴، ۱۶۵۶، ۱۶۵۸، ۱۶۶۰، ۱۶۶۲، ۱۶۶۴، ۱۶۶۶، ۱۶۶۸، ۱۶۷۰، ۱۶۷۲، ۱۶۷۴، ۱۶۷۶، ۱۶۷۸، ۱۶۸۰، ۱۶۸۲، ۱۶۸۴، ۱۶۸۶، ۱۶۸۸، ۱۶۹۰، ۱۶۹۲، ۱۶۹۴، ۱۶۹۶، ۱۶۹۸، ۱۷۰۰، ۱۷۰۲، ۱۷۰۴، ۱۷۰۶، ۱۷۰۸، ۱۷۱۰، ۱۷۱۲، ۱۷۱۴، ۱۷۱۶، ۱۷۱۸، ۱۷۲۰، ۱۷۲۲، ۱۷۲۴، ۱۷۲۶، ۱۷۲۸، ۱۷۳۰، ۱۷۳۲، ۱۷۳۴، ۱۷۳۶، ۱۷۳۸، ۱۷۴۰، ۱۷۴۲، ۱۷۴۴، ۱۷۴۶، ۱۷۴۸، ۱۷۵۰، ۱۷۵۲، ۱۷۵۴، ۱۷۵۶، ۱۷۵۸، ۱۷۶۰، ۱۷۶۲، ۱۷۶۴، ۱۷۶۶، ۱۷۶۸، ۱۷۷۰، ۱۷۷۲، ۱۷۷۴، ۱۷۷۶، ۱۷۷۸، ۱۷۸۰، ۱۷۸۲، ۱۷۸۴، ۱۷۸۶، ۱۷۸۸، ۱۷۹۰، ۱۷۹۲، ۱۷۹۴، ۱۷۹۶، ۱۷۹۸، ۱۸۰۰، ۱۸۰۲، ۱۸۰۴، ۱۸۰۶، ۱۸۰۸، ۱۸۱۰، ۱۸۱۲، ۱۸۱۴، ۱۸۱۶، ۱۸۱۸، ۱۸۲۰، ۱۸۲۲، ۱۸۲۴، ۱۸۲۶، ۱۸۲۸، ۱۸۳۰، ۱۸۳۲، ۱۸۳۴، ۱۸۳۶، ۱۸۳۸، ۱۸۴۰، ۱۸۴۲، ۱۸۴۴، ۱۸۴۶، ۱۸۴۸، ۱۸۵۰، ۱۸۵۲، ۱۸۵۴، ۱۸۵۶، ۱۸۵۸، ۱۸۶۰، ۱۸۶۲، ۱۸۶۴، ۱۸۶۶، ۱۸۶۸، ۱۸۷۰، ۱۸۷۲، ۱۸۷۴، ۱۸۷۶، ۱۸۷۸، ۱۸۸۰، ۱۸۸۲، ۱۸۸۴، ۱۸۸۶، ۱۸۸۸، ۱۸۹۰، ۱۸۹۲، ۱۸۹۴، ۱۸۹۶، ۱۸۹۸، ۱۹۰۰، ۱۹۰۲، ۱۹۰۴، ۱۹۰۶، ۱۹۰۸، ۱۹۱۰، ۱۹۱۲، ۱۹۱۴، ۱۹۱۶، ۱۹۱۸، ۱۹۲۰، ۱۹۲۲، ۱۹۲۴، ۱۹۲۶، ۱۹۲۸، ۱۹۳۰، ۱۹۳۲، ۱۹۳۴، ۱۹۳۶، ۱۹۳۸، ۱۹۴۰، ۱۹۴۲، ۱۹۴۴، ۱۹۴۶، ۱۹۴۸، ۱۹۵۰، ۱۹۵۲، ۱۹۵۴، ۱۹۵۶، ۱۹۵۸، ۱۹۶۰، ۱۹۶۲، ۱۹۶۴، ۱۹۶۶، ۱۹۶۸، ۱۹۷۰، ۱۹۷۲، ۱۹۷۴، ۱۹۷۶، ۱۹۷۸، ۱۹۸۰، ۱۹۸۲، ۱۹۸۴، ۱۹۸۶، ۱۹۸۸، ۱۹۹۰، ۱۹۹۲، ۱۹۹۴، ۱۹۹۶، ۱۹۹۸، ۲۰۰۰، ۲۰۰۲، ۲۰۰۴، ۲۰۰۶، ۲۰۰۸، ۲۰۱۰، ۲۰۱۲، ۲۰۱۴، ۲۰۱۶، ۲۰۱۸، ۲۰۲۰، ۲۰۲۲، ۲۰۲۴، ۲۰۲۶، ۲۰۲۸، ۲۰۳۰، ۲۰۳۲، ۲۰۳۴، ۲۰۳۶، ۲۰۳۸، ۲۰۴۰، ۲۰۴۲، ۲۰۴۴، ۲۰۴۶، ۲۰۴۸، ۲۰۵۰، ۲۰۵۲، ۲۰۵۴، ۲۰۵۶، ۲۰۵۸، ۲۰۶۰، ۲۰۶۲، ۲۰۶۴، ۲۰۶۶، ۲۰۶۸، ۲۰۷۰، ۲۰۷۲، ۲۰۷۴، ۲۰۷۶، ۲۰۷۸، ۲۰۸۰، ۲۰۸۲، ۲۰۸۴، ۲۰۸۶، ۲۰۸۸، ۲۰۹۰، ۲۰۹۲، ۲۰۹۴، ۲۰۹۶، ۲۰۹۸، ۲۱۰۰، ۲۱۰۲، ۲۱۰۴، ۲۱۰۶، ۲۱۰۸، ۲۱۱۰، ۲۱۱۲، ۲۱۱۴، ۲۱۱۶، ۲۱۱۸، ۲۱۲۰، ۲۱۲۲، ۲۱۲۴، ۲۱۲۶، ۲۱۲۸، ۲۱۳۰، ۲۱۳۲، ۲۱۳۴، ۲۱۳۶، ۲۱۳۸، ۲۱۴۰، ۲۱۴۲، ۲۱۴۴، ۲۱۴۶، ۲۱۴۸، ۲۱۵۰، ۲۱۵۲، ۲۱۵۴، ۲۱۵۶، ۲۱۵۸، ۲۱۶۰، ۲۱۶۲، ۲۱۶۴، ۲۱۶۶، ۲۱۶۸، ۲۱۷۰، ۲۱۷۲، ۲۱۷۴، ۲۱۷۶، ۲۱۷۸، ۲۱۸۰، ۲۱۸۲، ۲۱۸۴، ۲۱۸۶، ۲۱۸۸، ۲۱۹۰، ۲۱۹۲، ۲۱۹۴، ۲۱۹۶، ۲۱۹۸، ۲۲۰۰، ۲۲۰۲، ۲۲۰۴، ۲۲۰۶، ۲۲۰۸، ۲۲۱۰، ۲۲۱۲، ۲۲۱۴، ۲۲۱۶، ۲۲۱۸، ۲۲۲۰، ۲۲۲۲، ۲۲۲۴، ۲۲۲۶، ۲۲۲۸، ۲۲۳۰، ۲۲۳۲، ۲۲۳۴، ۲۲۳۶، ۲۲۳۸، ۲۲۴۰، ۲۲۴۲، ۲۲۴۴، ۲۲۴۶، ۲۲۴۸، ۲۲۵۰، ۲۲۵۲، ۲۲۵۴، ۲۲۵۶، ۲۲۵۸، ۲۲۶۰، ۲۲۶۲، ۲۲۶۴، ۲۲۶۶، ۲۲۶۸، ۲۲۷۰، ۲۲۷۲، ۲۲۷۴، ۲۲۷۶، ۲۲۷۸، ۲۲۸۰، ۲۲۸۲، ۲۲۸۴، ۲۲۸۶، ۲۲۸۸، ۲۲۹۰، ۲۲۹۲، ۲۲۹۴، ۲۲۹۶، ۲۲۹۸، ۲۳۰۰، ۲۳۰۲، ۲۳۰۴، ۲۳۰۶، ۲۳۰۸، ۲۳۱۰، ۲۳۱۲، ۲۳۱۴، ۲۳۱۶، ۲۳۱۸، ۲۳۲۰، ۲۳۲۲، ۲۳۲۴، ۲۳۲۶، ۲۳۲۸، ۲۳۳۰، ۲۳۳۲، ۲۳۳۴، ۲۳۳۶، ۲۳۳۸، ۲۳۴۰، ۲۳۴۲، ۲۳۴۴، ۲۳۴۶، ۲۳۴۸، ۲۳۵۰، ۲۳۵۲، ۲۳۵۴، ۲۳۵۶، ۲۳۵۸، ۲۳۶۰، ۲۳۶۲، ۲۳۶۴، ۲۳۶۶، ۲۳۶۸، ۲۳۷۰، ۲۳۷۲، ۲۳۷۴، ۲۳۷۶، ۲۳۷۸، ۲۳۸۰، ۲۳۸۲، ۲۳۸۴، ۲۳۸۶، ۲۳۸۸، ۲۳۹۰، ۲۳۹۲، ۲۳۹۴، ۲۳۹۶، ۲۳۹۸، ۲۴۰۰، ۲۴۰۲، ۲۴۰۴، ۲۴۰۶، ۲۴۰۸، ۲۴۱۰، ۲۴۱۲، ۲۴۱۴، ۲۴۱۶، ۲۴۱۸، ۲۴۲۰، ۲۴۲۲، ۲۴۲۴، ۲۴۲۶، ۲۴۲۸، ۲۴۳۰، ۲۴۳۲، ۲۴۳۴، ۲۴۳۶، ۲۴۳۸، ۲۴۴۰، ۲۴۴۲، ۲۴۴۴، ۲۴۴۶، ۲۴۴۸، ۲۴۵۰، ۲۴۵۲، ۲۴۵۴، ۲۴۵۶، ۲۴۵۸، ۲۴۶۰، ۲۴۶۲، ۲۴۶۴، ۲۴۶۶، ۲۴۶۸، ۲۴۷۰، ۲۴۷۲، ۲۴۷۴، ۲۴۷۶، ۲۴۷۸، ۲۴۸۰، ۲۴۸۲، ۲۴۸۴، ۲۴۸۶، ۲۴۸۸، ۲۴۹۰، ۲۴۹۲، ۲۴۹۴، ۲۴۹۶، ۲۴۹۸، ۲۵۰۰، ۲۵۰۲، ۲۵۰۴، ۲۵۰۶، ۲۵۰۸، ۲۵۱۰، ۲۵۱۲، ۲۵۱۴، ۲۵۱۶، ۲۵۱۸، ۲۵۲۰، ۲۵۲۲، ۲۵۲۴، ۲۵۲۶، ۲۵۲۸، ۲۵۳۰، ۲۵۳۲، ۲۵۳۴، ۲۵۳۶، ۲۵۳۸، ۲۵۴۰، ۲۵۴۲، ۲۵۴۴، ۲۵۴۶، ۲۵۴۸، ۲۵۵۰، ۲۵۵۲، ۲۵۵۴، ۲۵۵۶، ۲۵۵۸، ۲۵۶۰، ۲۵۶۲، ۲۵۶۴، ۲۵۶۶، ۲۵۶۸، ۲۵۷۰، ۲۵۷۲، ۲۵۷۴، ۲۵۷۶، ۲۵۷۸، ۲۵۸۰، ۲۵۸۲، ۲۵۸۴، ۲۵۸۶،

اور اس کے دونوں سروں پر اور باقی محیط کے برابر برابر
فاصلوں پر تار برقی کے کنبے لگے ہوئے ہیں اور اسکی
تعداد n ہے، احاطہ کرنیوالے نصف قطر r محدودہ
پر ایک شخص کھڑا ہو کر نزدیک کے سرے سے
ن n وین اور ق n وین کھبوں کو ایک خط مستقیم
میں دیکھتا ہے ثابت کرو کہ گولائی کا نصف قطر
 $\frac{1}{2} \text{ جم } (ن + ق)$ نہ $ق$ نہ $ن$ ق نہ ہے جہاں
نہ $\frac{1}{2} \text{ جم } (ن + ق)$ ، اس میں 1 نزدیک کے سرے سے
اس شخص کے فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے۔

۹۳۔ ثابت کرو کہ مثلث کے تین جانبی دائروں
کے نصف قطر مساوات ذیل کی قیمتوں کے برابر ہیں
لا۔ لا (۴س + ر) + لان۔ رن = ۰

اس میں ن نصف مجموعہ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔
۹۴۔ لا اور ما کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\text{جم لا} + \text{جم ما} = 1$$

$$\text{جم لا} + \text{جم ما} = ب$$

$$\text{اور جم لا} + \text{جم ما} = ج$$

حاصل اسقاط کو منطق شکل میں بیان کرو۔

۹۵۔ سلسلہ ذیل کو ن رقموں تک جمع کرو

$$\text{جب ۱ جب ۲ جب ۳ جب ۴ جب ۵ جب ۶ جب ۷ جب ۸ جب ۹ جب ۱۰ جب ۱۱ جب ۱۲ جب ۱۳ جب ۱۴ جب ۱۵ جب ۱۶ جب ۱۷ جب ۱۸ جب ۱۹ جب ۲۰ جب ۲۱ جب ۲۲ جب ۲۳ جب ۲۴ جب ۲۵ جب ۲۶ جب ۲۷ جب ۲۸ جب ۲۹ جب ۳۰ جب ۳۱ جب ۳۲ جب ۳۳ جب ۳۴ جب ۳۵ جب ۳۶ جب ۳۷ جب ۳۸ جب ۳۹ جب ۴۰ جب ۴۱ جب ۴۲ جب ۴۳ جب ۴۴ جب ۴۵ جب ۴۶ جب ۴۷ جب ۴۸ جب ۴۹ جب ۵۰ جب ۵۱ جب ۵۲ جب ۵۳ جب ۵۴ جب ۵۵ جب ۵۶ جب ۵۷ جب ۵۸ جب ۵۹ جب ۶۰ جب ۶۱ جب ۶۲ جب ۶۳ جب ۶۴ جب ۶۵ جب ۶۶ جب ۶۷ جب ۶۸ جب ۶۹ جب ۷۰ جب ۷۱ جب ۷۲ جب ۷۳ جب ۷۴ جب ۷۵ جب ۷۶ جب ۷۷ جب ۷۸ جب ۷۹ جب ۸۰ جب ۸۱ جب ۸۲ جب ۸۳ جب ۸۴ جب ۸۵ جب ۸۶ جب ۸۷ جب ۸۸ جب ۸۹ جب ۹۰ جب ۹۱ جب ۹۲ جب ۹۳ جب ۹۴ جب ۹۵ جب ۹۶ جب ۹۷ جب ۹۸ جب ۹۹ جب ۱۰۰}$$

۹۶۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ انچ ہے اور اس کے

ایک قطعہ کا رقبہ ۲۵ مربع انچ ہے ، قطعہ کی قوس کے
محاذی دائرہ کے مرکزہ پر جو زاویہ بنتا ہے اس کو عمل
ترسیبی سے دریافت کرو۔



۹۷۔ ثابت کرو کہ ۴ جب $2 = (5 + 5) - (3 - 5)$ ۔

۹۸۔ اگر جم (بہ - جہ) + جم (جہ - عہ) + جم (عہ - یہ) + ۱ = ۰
تو ثابت کرو کہ بہ - جہ ، جہ - عہ یا عہ - یہ ، π کے کسی ضیق
کے برابر ہے۔

۹۹۔ کسی مثلث کے زاویوں کی جیوب کا حاصل ضرب
ف ہے اور جیوب التمام کا حاصل ضرب ق ہے ،
ثابت کرو کہ زاویوں کے کاس مساوات ذیل کی قیمتیں
ہیں

$$ق - لا - ف لا + (ا + ق) - لا - ف = -$$

اگر $ف = \frac{1}{2} (3 + 3)$ اور $ق = \frac{1}{2} (3 - 3)$ تو ثابت
کرو کہ مثلث کے زاوے ۴۵ ، ۶۰ ، اور ۷۵ ہیں۔

۱۰۰۔ ایک خاص مقام سے جہاز کی مختلف جہات
کا مشاہدہ کیا گیا ، کسی خاص وقت جہاز ، سمت شمال
سے مغرب کی طرف کو زاویہ عم بناتا تھا ، اس کے
دس منٹ بعد وہ ٹھیک شمال کی جانب میں تھا ،
اور اس کے دس منٹ بعد جہاز کی سمت ، جانب شمال

سے مشرق کی طرف کو زاویہ عم بناتی تھی، اگر فرض کر دیا جائے کہ اس اثنا میں جہاز کی رفتار اور سمت حرکت میں کچھ فرق نہیں آتا تو ثابت کر دو کہ اس کی سمت حرکت جانب شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ طہ بناتی ہے جہاں $\text{مس طہ} = \text{عم جب} - \text{عم}$ (عم - عم)

۱۰۱۔ سطح ہموار پر ایک پہاڑی ہے اور اس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح ہموار پر پہاڑی کا ڈھلوان عہ ہے اور پائیں پہاڑ سے و فٹ کے فاصلے پر ایک مقام ہے جس سے پہاڑ کے سب سے اونچے نقطہ (جو دکھائی دیتا ہے) زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے ثابت کر دو کہ پہاڑ کی بلندی میدان کوہ سے $\frac{\text{وجب} - \text{جب}}{\text{عہ}}$ ہے

۱۰۲۔ اگر مثلث وج ج میں نقاط الزویا و ، ب ، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود لگائے جائیں اور ان کے پائیں بالترتیب د ، ع ، ف ہوں اور مثلثات د ع ف ، و ع ف ، ب ف د اور ج د ع کے اندرونی دائروں کے نصف قطر صہ ، صہ ، صہ ، صہ ہوں تو ثابت کر دو کہ $\text{صہ} = \text{و صہ} - \text{صہ}$

۱۰۳۔ ایک گول کھیت کا مرکز و ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ و ہے، ایک رسی کے ذریعہ ایک گول

نقطہ ۱ سے مربوط ہے اور کھیت کے $\frac{1}{n}$ حصہ پر گھاس
چر سکتا ہے، اگر محیط کا بعید ترین نقطہ جس تک ٹھوڑا
پہنچ سکتا ہے ب ہو اور Δ (دوب = طہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب طہ} + (\pi - \text{طہ}) = \text{جم طہ} = \pi \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$$

۱۰۴۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{طہ} = \text{مس} - (\text{مس} - \text{طہ}) - \frac{1}{n} \text{ جب } \frac{3}{2} \text{ جب } \frac{2}{n} \text{ طہ}$$

$$۱۰۵۔ \text{اگر جم}^2 \text{ طہ} = \frac{\text{طہ}^2}{n} \text{ اور مس}^2 \text{ طہ} = \text{مس}^2$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ جم}^2 \text{ طہ} + \text{جب}^2 \text{ طہ} = \left(\frac{\text{طہ}}{n} \right)^2$$

۱۰۶۔ ایک شخص سطح افقی پر کسی خاص سمت میں
فاصلہ ۱ چلتا ہے، اور اس کے بعد ایک اور سمت
میں جو سمت سابقہ سے زاویہ θ بناتی ہے فاصلہ ۱
جاتا ہے، ثابت کرو کہ ایک ہی رخ میں n دفعہ ایسا
کرنیکے بعد وہ اپنے نقطہ ابتدائی سے $\frac{1}{n}$ فاصلہ
پر ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ جس خط سے یہ فاصلہ تعبیر
ہوتا ہے وہ اس کی اصلی یا ابتدائی سمت سے زاویہ

$$(n-1) \frac{\theta}{n} \text{ بناتا ہے}$$

۱۰۷۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}(\text{جہ-لہ})}{\text{مس}(\text{عہ-بہ})} + \frac{\text{مس}(\text{لہ-بہ})}{\text{مس}(\text{عہ-جہ})} + \frac{\text{مس}(\text{بہ-جہ})}{\text{مس}(\text{عہ-لہ})} + \frac{\text{مس}(\text{جہ-لہ})}{\text{مس}(\text{عہ-بہ})} = 1$$

۱۰۸۔ ایک شہاب ثاقب دو مقامات λ اور β کے عین اوپر سے ایک خط مستقیم میں گزرتا ہے، مقامات سطح افقی میں ایک دوسرے سے ... فٹ کے فاصلہ پر واقع ہیں، جب وہ λ کے اوپر ہو تو نقطہ β سے اس کا ارتفاع 50° ہوتا ہے اور جب β کے اوپر ہو تو نقطہ λ سے اس کا ارتفاع 40° ہوتا ہے، نقطہ λ سے اُس مقام کا فاصلہ قریب ترین فٹ تک دریافت کرو جہاں وہ سطح افقی پر جا کے گرے گا۔

۱۰۹۔ ایک پہاڑ کے رخ کا میلان سطح افقی کے ساتھ ہے، پہاڑ کے پائیں پر دو نقاط ہیں جن سے دو سیدھے راستے دو عمودی سطحوں میں اوپر جاتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، اگر دو شخص ان راستوں سے اوپر چڑھنا شروع کریں اور پائیں پہاڑ سے λ اور β فٹ کے فاصلوں پر ایک دوسرے کو ملیں تو ثابت کرو کہ اُس وقت انکی عمودی بلندی (ف) سطح افقی سے، مساوات درجہ دوم

$$(2 - \text{جب } \lambda \text{ فٹ}) - (\lambda + \beta) \text{ فٹ} + \lambda \beta \text{ جب } \lambda \text{ فٹ} = 0$$

کی چھوٹی قیمت کے برابر ہے۔

۱۱۰۔ اگر مساوات $\text{مس} (\lambda + \beta) = \text{مس} \lambda + \text{مس} \beta$ کی قیمتیں λ ، β ، $\lambda + \beta$ ہوں جن میں سے کسی دو کے ماس برابر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس} = \text{مس} + \text{سب} + \text{مس} + \text{سج} + \text{مس} =$$

۱۱۱۔ اگر مساوات جب (ط + ع) = ک جب ط کی قیمتیں ط، ط، ط، ط ہوں جن میں سے کسی دو کا تفاوت $\pi 2$ یا $\pi 2$ کے کسی ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط} = \pi (1 + 2\pi)$$

۱۱۲۔ مسائل دفعہ ۲۴۹ کو تطبیلی عمل سے ثابت کرو

۱۱۳۔ مثالیں ذیل کو ثابت کرو

$$(1) \text{ جب } \text{ع} + \text{سب} + \text{سج} = \text{جب} \text{ (ع} + \text{سب} + \text{سج)}$$

$$= \text{سب} + \text{سج} = \text{جب} \text{ (سب} + \text{سج)}$$

$$(2) \text{ جم} + \text{ع} + \text{سب} = \text{جم} + \text{سب} + \text{ع} + \text{سج} + \text{سب} + \text{ع} + \text{سج}$$

$$+ 2 \text{ جب (سب} + \text{سج) جب (ع} + \text{سج) =}$$

۱۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات قط ط + قم ط = ج

کی دو قیمتیں ۰ اور $\pi 2$ کے درمیان واقع ہیں اگر ج > ۸

اور چار قیمتیں اگر ج < ۸

۱۱۵۔ اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے خارجی منصفوں

کے تقاطع سے مثلث ا ب ج بنے اور مثلث ا ب ج

کے خارجی منصفوں کے تقاطع سے مثلث ا ب ج

بنے اور علیٰ ہذا لقیاس تو ثابت کرو کہ اس طرح سے

جون واں مثلث حاصل ہوگا اس کے زاویہ ا کی

قیمت $\frac{\pi}{3} + (\frac{\pi}{4})^2 (1 - \frac{\pi}{4})$ کے برابر ہوگی نیز ثابت

کرو کہ مثلثوں کا میلان متساوی الاضلاع ہونیکی طرف ہے۔
 ۱۱۶۔ کسی مقام λ سے ایک پہاڑ کی چوٹی ϕ ٹھیک
 شمال کی طرف واقع ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع مقام
 λ سے ϵ ہے، نقطہ λ سے دفٹ بلند ایک پہاڑی
 کی چوٹی β ہے اور اس چوٹی سے ϕ کا زاویہ ارتفاع
 یہ ہے، اگر β پر کھڑے ہو کر دیکھیں تو λ کی سمت
 جانب جنوب کے مغرب کے طرف کو زاویہ λ بناتی ہے
 اور ϕ کی سمت مقام λ کے شمال کی طرف کو زاویہ
 ϵ بناتی ہے، ثابت کرو کہ مقام λ سے چوٹی ϕ کی

بلندی $\frac{\text{مس بع جب جہ}}{\sin \epsilon}$ ہے

۱۱۷۔ ایک شخص نے ایک پہاڑ کے پائیں پر کھڑے
 ہو کر ایک شے کو جو آدھ میل کے فاصلہ پر تھی اسی
 سطح اُتقی میں مشاہدہ کیا جس میں کہ وہ خود تھا، اگلے
 بعد ۲۰۰ گز پہاڑ کے اوپر چڑھا اور اس نے دیکھا کہ
 اُس شے کا زاویہ انخفاض 30° ہے اور اس کی سمت
 اس کے نقطہ ابتدائی کی سمت کے ساتھ زاویہ 25°
 کا بناتی ہے، جس راستے سے وہ پہاڑ پر چڑھتا ہے
 اس کا میلان اُتقی کے ساتھ قریب ترین منٹ تک
 دریافت کرو

۱۱۸۔ اگر کسی مثلث کے اُس جانبی دائرہ کے محاذی

جو ضلع کو کوس کرتا ہے اندرونی دائرہ کے مرکز پر زاویہ
۲ فیہ اور باقی دو جانبی دائروں کے مرکزوں پر زاویے
۲ فیہ اور ۲ فیہ بینیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \text{ جب } \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

۱۱۹۔ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا ایک
ضلع ایک ثابت مستقیم خط پر رکھا گیا ہے اور اس
ضلع کے ایک سرے کے گرد فکل کو اتنا پھرایا گیا ہے
کہ ساتھ کا ضلع خط مستقیم پر منطبق ہو جاتا ہے، اگر اسطرح
کرنے سے شکل کو ایک پورا چکر دیا جائے تو ثابت
کرو کہ کثیر الاضلاع کا کوئی راس زاویہ $\frac{2\pi}{n}$ کا $\frac{1}{n}$ حصہ
فاصلہ طے کرتا ہے جہاں n اس دائرہ کا نصف قطر ہے جو
کثیر الاضلاع کے گرد بنایا جائے نیز ثابت کرو کہ دائروں کے
جو قطاع کوئی راس زاویہ مرسم کرتا ہے ان کے رقبوں کا
مجموعہ πr^2 ہے

۱۲۰۔ معادلات ذیل سے طہ اور فہ کو ساقط کرو

$$\frac{1}{a} \text{ جم طہ} + \frac{1}{b} \text{ جب فہ} = 1$$

$$\frac{1}{a} \text{ جم فہ} + \frac{1}{b} \text{ جب طہ} = 1$$

$$\text{اور } \frac{1}{a} \text{ طہ جم فہ} + \frac{1}{b} \text{ جب طہ جب فہ} = \frac{1}{a}$$

۱۲۴۔ سطح افقی پر ایک پہاڑی ہے، اس کا قاعدہ گول ہے اور اس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح افقی کے دو مقامات سے جن کے فاصلے قاعدہ سے ۱ اور ۲ فٹ ہیں پہاڑ کے اُس نقطہ کے ارتفاعی زاویے ۳۰° اور ۴۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں جو سب سے اونچا دکھائی دیتا ہے، ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی

$$= \left[\frac{(2 \text{ مم فٹ}) - (1 \text{ مم فٹ})}{\text{مم فٹ} - \text{مم فٹ}} \right]^2 \text{ ہے۔}$$

۱۲۵۔ ایک برج کی چوٹی پر ایک نصف کرہ گنبد ہے اور گنبد کے سرے صلیب ہے، کسی نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع ۴۵° ہے اور گنبد کا یہ گنبد کی سیدھ میں فاصلہ ۱ جانے پر صلیب گنبد کے عین اوپر دکھائی دیتا ہے اور اُس وقت گنبد کا زاویہ ارتفاع ۳۰° ہے، ثابت کرو کہ سطح زمین سے گنبد کے مرکز کی بلندی

$$= \frac{\text{جب } ۱ \text{ جب } ۲}{\text{جب } (۱ - ۲)} \times \frac{\text{جب } ۲ - \text{جب } ۱}{\text{جب } ۲ - \text{جب } ۱}$$

۱۲۶۔ اگر جب ۱ + جب ۲ + جب ۳ = ۱ تو ثابت کرو کہ مثلث ۱ ۲ ۳ کا بیرونی دائرہ اس کے نوعتی دائرہ کو قائم الزاویہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۲۷۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۱ ہے اور اس کے

محیط پر ایک ایسا نقطہ د ہے جس کو مرکز مانکر ایک اور دائرہ
 کھینچا گیا ہے اس دائرہ کا نصف قطر $\frac{3}{4}$ ہے ، ان
 دائروں کے درمیان جو ہلال کی شکل بنتی ہے اس کے
 اندر ایک اور دائرہ رکھ دیا گیا ہے جس کا نصف قطر
 $\frac{1}{2}$ ہے ، ثابت کرو کہ اگر چھوٹا دائرہ اصلی دائرہ
 (نصف قطر $\frac{3}{4}$) کے محیط پر حرکت کرے تو اس کا
 مرکز ایک انتہائی مقام سے دوسرے انتہائی مقام
 تک حرکت کرنے میں ایک ایسی قوس مرتسم کرے گا
 جس کا طول $\frac{4}{3}\pi$ ہوگا۔

۱۲۸۔ معادلات ذیل سے لا اور ما کو ساقل کرو

$$\text{جب لا} + \text{جب ما} = \text{د}$$

$$\text{جم لا} + \text{جم ما} = \text{ب}$$

$$\text{مس لا} + \text{مس ما} = \text{ج}$$

۱۲۹۔ اگر ۲ جم ن طہ کو صی سے تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ

$$\text{صی} + ۱ = \text{صی} - \text{صی} - ۱$$

اس لئے ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ جم ل طہ} = \text{صی} - ۷ \text{ صی} + ۱۴ \text{ صی} - ۷ \text{ صی}$$

۱۳۰۔ عمل تریبی سے ثابت کرو کہ ۷ د مساوات

$$\text{جم لا} = \text{لا} (\text{جہاں لا کی پیمائش نیم قطری زاویوں میں کی گئی}$$

ہے) کا تقریبی حل ہے ، نیز ثابت کرو کہ مساوات کی

صرف یہی حقیقی قیمت ہے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ

جب (لا-پ) جب (لا-ج) جب ۲ (لا-ع) + دو متساہ جملے =
 جب (ع-پ) جب (ع-ج)

۳۱۔ اگر اوب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

بہ ۱ جم (ب-ج) + جب ۲ جم (ج-و) + جب ۳ جم (و-ب)

= ۳ جب ۱ جب ۲ جب ۳

۳۱۔ ایک شخص نے دو اشیا کو ٹھیک سمت مغرب

س دیکھا، اس کے بعد وہ فاصلہ ج شمال کی طرف چلا

اور اُس نے اشیا کے محاذی زاویہ عہ دیکھا، شمال کی

بانب میں اور فاصلہ ج جانے پر اُس نے اشیا کے

محاذی زاویہ بہ مشاہدہ کیا، ثابت کرو کہ اشیا کا

ریانی فاصلہ $\frac{ج}{۳}$ ہے۔

۳۲۔ ایک پہاڑی کا پہلو مسلح ہے اور افق سے

اویہ عہ بناتا ہے، اُس پر سطح عمودی میں ایک سُرک

آتی ہے جو اُس سطح عمودی سے جو خط میلان اعظم

س سے گزرتی ہے زاویہ بہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سُرک

میلان افق سے مس ۱ (مس عہ جم بہ) ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ مثلث اوب ج کے اندرونی

ور بیرونی دائروں کے مرکوز کو ملانے والا خط،

خط ب ج سے زاویہ مس ۲ (جم بہ + جم ج-۱) بناتا ہے۔

۱۳۶۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

لا جب طہ۔ ماجم طہ =۔ جب م طہ

اور لاجم طہ + ماجب طہ = $\frac{5}{4}$ ۔ $\frac{3}{4}$ جم م طہ

۱۳۷۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے اگر کسی نقطہ کو (جو ضروری نہیں کہ شکل کے سطح میں واقع ہو) کثیر الاضلاع کے کو نوں سے ملایا جائے اور ان خطوط کے مربعوں کا اوسط حسابی نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ اوسط ان دو خطوط کے مربعوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہوگا جو نقطہ مذکورہ اور محیط دائرہ کے قریب ترین اور بعید ترین نقاط کو ملائیں۔

۱۳۸۔ تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک خط مستقیم پر واقع ہیں اور 'ا' ب کو 'ب' ج سے وہی نسبت ہے جو 'م' کو 'ن' سے ہے، 'ا' نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے متوازی اور مستقیم خط 'لا'، 'ب'، 'ما'، 'ج' سے کھینچے گئے ہیں، نقطہ 'ما' خط 'لا' پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ 'ر' خط 'ج' سے پر اگر کسی وقت پر جوت سے بغیر ہوتا ہے $ا\ط = ا + (ب\جب) (ن + ط)$

اور فاصلہ ج ر = ج + جب (ن + ج)

اور اگر مستقیم خط ط ر، 'ب'، 'ما' کو نقطہ ق پر قطع کرے تو فاصلہ ب ق کے لئے ایک متساویہ جملہ دریافت کرو۔

۱۳۹۔ ثابت کرو کہ

جب (یہ۔ جب) ۳ + جب (جہ۔ جہ) جب ۲ + جب (جہ۔ جہ) جب ۱

جب^۱ { قم جہ + جباعہ + جب^۲ - جب^۳ ع جب بہ جم جہ } بناتی ہے
 نیز ثابت کرو کہ سطح مائل کے خط میلان اعظم اور ایک
 خط مذکور کے درمیان زاویہ
 مسا^۱ (جب جہ - جباعہ جم جہ) بنتا ہے -

مس۔ ۱۔ $\left(\frac{\text{مس پ مسرج}}{\text{مس پ - مسرج}} \right)$ بنا ہوا ہے۔

$$م = \frac{\text{جب (ع - ۳ طه)}}{\text{جب ۳ طه}} = \frac{\text{جم (ع - ۳ طه)}}{\text{جم ۳ طه}}$$

۴۷۔ ایک ن اضلاع کی تقسیم کثیر الاضلاع n اضلاع کا مرکز و اور
 نصف قطر r ہے، P کوئی نقطہ ہے جس کا فاصلہ
 O سے j کے برابر ہے، اگر نقطہ P سے کثیر الاضلاع

کے اضلاع پر عمود کھائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ $n(n+1)$ ہے۔

۴۸۔ ایک دائرہ کی کسی قوس AB کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ 2θ بنتا ہے اور نقاط A اور B پر کے ٹانگے نقطہ M پر ملتے ہیں، عمل ترسیبی سے θ کی قیمت قریب ترین درجہ تک اسی صورت میں دریافت کرو (۱) جبکہ دائرہ کا رقبہ A رقبہ کے مساوی ہو جو M اور B اور قوس AB کے اندر گھرا ہوا ہے (۲) جب M اور B کے طولوں کا مجموعہ قوس AB اور وتر AB کے مجموعہ کے برابر ہو۔

۴۹۔ ثابت کرو کہ مثلث کے زاوے ارتباعات ذیل کو پورا کرتے ہیں

$$(1) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(2) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

۵۰۔ نقطہ O سے ایک شخص ایک پہاڑی پر سیدھے راستے سے چڑھتا ہوا دکھائی دیا اور جب وہ دو مقامات P اور Q پر سے گذرا تو اس کے ظاہری قد کے ارتفاعی زاوے مشاہدہ کرنے سے معلوم ہوا کہ $\angle POQ = 90^\circ$ ۔
زاویہ $\angle POQ = 90^\circ$ جب مقامات P اور Q کے ارتفاع نقطہ

و سے عہ اور بہ دکھائی دے، اگر اتنی سے راستہ نہ ہو تو ثابت کر دو کہ نہ مساوات ذیل کی شرائط کو کرتا ہے

$$\text{جب } ۱ \text{ نہ} = (ل \text{ جب عہ} - \text{جب بہ}) / (ل - ۲ \text{ جم جہ} + ۱)$$

۱۵۱۔ مساوات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

$$لا + ۱ = ۱ + (۲ \text{ جم طہ} - \text{جم } ۲ \text{ طہ})$$

$$اور \quad ما = ۱ + (۲ \text{ جب طہ} - \text{جب } ۲ \text{ طہ})$$

۱۵۲۔ سطح مستوی میں ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے سطح کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عم گئے ہیں، ثابت کر دو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا ان خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے عمودوں کے پایوں کو کثیر الاضلاع کے مرکز کے ملاتے ہیں۔

۱۵۳۔ ایک مستطیلی کھیت کے اضلاع ۱ اور ۲ ہیں اور اس کے مرکز پر ایک کھوٹی ہے جس ساتھ ایک رسی کے ذریعہ ایک گھوڑا بند ہا ہے، گھوڑا ٹھیک آدھے کھیت میں بلا تکلف چر سکے ثابت کر دو کہ رسی کا طول تقریباً ۱×۰.۵۸۳ ۔

۱۵۴۔ ثابت کر دو کہ مساوات جب (طہ + ل) = (جہ + ۲) کی چار قیمتیں ہیں جن کا مجموعہ دو قائموں کے طاق

کے برابر ہے۔

۱۵۵۔ اگر طہ کوئی مثبت حادثہ زایہ ہو تو ثابت کرو کہ زایہ طہ کے بڑھنے سے نسبت جب طہ ہمیشہ بڑھتی ہے اور مسطح ہمیشہ گھٹتی ہے۔

۱۵۶۔ اگر جب لا = م جب ما جہاں م ایک سے بڑا ہے تو ثابت کرو کہ جب زاویہ طہ صفر سے قائمہ تک بڑھتا ہے تو نسبت $\frac{م}{لا}$ متواتر بڑھتی ہے اور اس کی قیمتیں م اور لا کے برابر ہوتی ہیں جبکہ لا بالترتیب صفر اور ایک قائمہ کے برابر ہو۔

۱۵۷۔ ثابت کرو کہ

جیب (ب-م) جیب (ع-ل) + جیب (ج-ح) جیب (ز-س) + جیب (د-ط) جیب (ذ-ظ)

۳ = جیب (ع-ب) جیب (ب-ج) جیب (ج-د) جیب (د-ه) جیب (ه-ز) جیب (ز-ح) جیب (ح-ط)
۱۵۸ - ثابت کرد که $\text{حج} (۳-ع-ب-د-ه-ز-ح-ط)$

= ۴ جم (ع+ب+ج-ل) جم (ع+ج-ب-ل) جم (ع+ل-ب-ج) جم
 جہاں جہ ان سب رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے
 جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے ماقبل یہ علامت
 لکھی گئی ہے۔

۱۵۹- ثابت کرو کہ

جیب (ع + یه + ج) جم عه جیب به جیب ج (ع + به + ج) جیب عه جیب به جیب ج
- جیب (ع + به + ج) جم عه جم به جم ج - جم (ع + به + ج) جیب عه جم به جم ج
+ جیب (ع + به + ج) جم (به + ج) جم (ع + ج) جم (به + ج) جیب (ج + ع) ع
۱۶۰ - ثابت کرد که

جبب^۱ ع جب (بہ - جم) جب (جہ - لہ) جبب (لہ - بہ)
 + جبب^۲ بہ جب (جہ - لہ) جبب (لہ - عہ) جبب (عہ - جہ)
 + جبب^۳ جہ جب (لہ - عہ) جبب (عہ - بہ) جبب (بہ - لہ)
 - جبب^۴ لہ جبب (عہ - بہ) جبب (بہ - جہ) جبب (جہ - عہ) =

۱۶۱ - جلد فن ق - رس کو مختصر کر دو جہاں

ف = لا جم (عہ + بہ) + ما جب (عہ + بہ) - جم (عہ - بہ)
 ق = لا جم (جہ + لہ) + ما جب (جہ + لہ) - جم (جہ - لہ)
 ر = لا جم (عہ + جہ) + ما جب (عہ + جہ) - جم (عہ - جہ)
 س = لا جم (بہ + لہ) + ما جب (بہ + لہ) - جم (بہ - لہ)
 ۱۶۲ - اگر ل^۱ + ب^۲ - ۲ اب جم عہ = ج^۳ + د^۴ - ۲ ج د جم بہ
 ب^۱ + ج^۲ - ۲ ب ج جم بہ = ل^۳ + د^۴ - ۲ ل د جم لہ
 اور اب جب عہ + ج د جب جہ = ب ج جب بہ + د ج جب لہ

تو ثابت کرو کہ جم (عہ + جہ) = جم (بہ + لہ)

۱۶۳ - ثابت کرو کہ مساوات

$$= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \text{جم ط} & ۱ \\ \text{جم ط} & ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{جم عہ} & ۱ & \cdot \\ \cdot & \text{جم جہ} & \cdot & ۱ \end{vmatrix}$$

کامل ط = ن + (-۱) جب^۱ { $\frac{\text{جم عہ} + \text{جم بہ} - ۲ \text{جم عہ جم بہ جم جہ}}{\text{جب جہ}}$ } ہے

۱۶۴۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث ا ب ج میں

جم م ا + جم م ب + جم م ج - ا = ± م جب م ک جب م پ جب م ک

اگر م کی صورت بالترتیب م ن + ۱ ہو یا م ن + ۳

۱۶۵۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث ا ب ج میں

(۱) ا جم ب جم ج + ب جم ج جم ا + ج جم ا جم ب

= ا ب ج (۱ - ۲ جم ا جم ب جم ج)

اور (۲) جب م ا + جب م ب + جب م ج

= (۱ - ۲) م ج م ا جب م ب جب م ج

۱۶۶۔ اگر کسی مثلث کے زاوے ا، ب، ج ہوں تو

ثابت کرو کہ

سن' (م ب م ج) + سن' (م ج م ا) + سن' (م ا م ب)

= سن' { ۱ + $\frac{۸ جم ا جم ب جم ج}{جب ا + جب ب + جب ج}$ }

۱۶۷۔ کسی مثلث کے نقاط الزاویہ ا، ب، ج میں سے

ایسے مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو اضلاع ا ب، ب ج، ج ا

میں سے ہر ایک سے زاویہ ع بناتے ہیں، ثابت کرو کہ

جو مثلث اسطرح بنتا ہے اس کے اضلاع کی نسبت

مثلث ا ب ج کے اضلاع کے ساتھ

جم ع - جب ع (م ا + م ب + م ج) : ۱ ہے

۱۶۸۔ سطح آتقی پر اسطوانہ کی شکل کا ایک برج ہے

اور برج کی چوٹی پر ایک مخروط ہے، سطح زمین کے

ایک مقام پر کھڑے ہو کر برج کی چوٹی کے قریب ترین نقطہ کا زاویہ ارتفاع α اور مخروط کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع β مشاہدہ کیا گیا ہے، برج کی سیدھ میں فاصلہ l جائے پر یہی زاوے بالترتیب β اور α ہو جاتے ہیں، ثابت کرو کہ برج اور مخروط کی چوٹیوں کی بلندیوں سطح زمین سے h جب α جب β α (ج-ج) اور h جب β α (ج-ج) ہیں نیز برج کا قطر

۱۲ جب β α (ج-ج) - ۱۲ جب α β (ج-ج) ہے
۱۶۹ - سطح زمین کے نیچے ایک پتھر کی تہ ہے، اور اسکا میلان افق سے دریافت کرنے کے لئے ایک افقی مربع کے تین نقاط پر عمودی سوراخ کھودے گئے ہیں۔ ان نقاط پر تہ کی گہرائیاں بالترتیب l ، b ، c ہیں

ثابت کرو کہ یہ میلان افق سے مس- h (۱-ب) + (ب-ج) ہے
جہاں d مربع کے ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷۰ - ایک پہاڑ کے مقابل کی جانبوں میں دو مقام l اور b ہیں، l سے b تک ایک سڑک نکالنی منظور ہے، l اور b سے ایک دور کے مقام c کے ارتفاعی زاوے α اور β مشاہدہ کئے گئے ہیں اور زاویہ α β = β ، نیز α β اور b c کے طول l اور b معلوم ہیں ثابت کرو کہ مقام b کی بلندی (د) مقام l کا

۱۷۱۔ جب α ۔ ب جب β اور α ب کا طول (ل) = $\alpha + \beta$ ۔ α ب جب β اور خط α ب افقی سے زاویہ جیب α ج اور خط α ج سے زاویہ جیب β بناتا ہے۔

۱۷۱۔ ایک پہاڑی کا زاویہ ارتفاع α ہے، ایک شخص ایسی سمت میں اس کے اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے جو خط میلان اعظم سے زاویہ α بناتی ہے، فاصلہ α اوپر چڑھنے کے بعد وہ دیکھتا ہے کہ ایک ایسی شے کا زاویہ انحناس β ہے جو اس کی سمت طریق میں سے گزرنے والی عمودی سطح اور پائیں کوہ میں سے گذرنے والی افقی سطح میں واقع ہے، اس کے بعد وہ فاصلہ α اور اوپر چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اسی شے کا زاویہ انحناس β ہے، ثابت کرو کہ زاویہ ارتفاع α مساوات ذیل کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{\alpha}{\beta} - (\alpha - \beta) + \alpha \right\} = \alpha \text{ قہ قہ } \alpha$$

۱۷۲۔ ایک پہاڑ کی تین چوٹیاں ہیں، جن میں سے α سب سے نیچی ہے اور چوٹی α سے β کی بلندی (د) معلوم ہے، چوٹی α سے β اور γ کے ارتفاعی زاوے α اور β مشاہدہ کئے گئے ہیں، اگر α ب اور α ج میں سے گذرنے والی عمودی سطحوں کا درمیانی زاویہ α ہو اور نقطہ β پر

ب ۱ اور ب ج میں سے گزرنے والی عمودی سطحوں
درمیان: اوپر ذہ دکھائی دے تو ثابت کرو کہ چوٹی ۱ سے چوٹی
ج کی بلندی د م م بہ مس جہ جب ذہ قم (طہ + ذہ) ہے
۱۷۳۔ ایک پہاڑ کے سطح پہلو پر دو سیدھے راستے
ب ج اور ج ۱ ہیں، ان کے طول بالترتیب ۱ اور ۲
ہیں اور دونوں کا چڑھاؤ اوپر کی طرف م میں ۱ ہے
(یعنی م افقی میں ۱ عمودی) اور نقطہ ب سے ۱ تک
چڑھاؤ ۱ میں ۱ ہے، ثابت کرو کہ پہاڑ کے پہلو کا
میلان افقی سے ۱ ہے جہاں

$$۴ \text{ } \angle B = (A + B) \text{ } \angle C - (A + B) \text{ } \angle M$$

۱۷۴۔ ثابت کرو کہ مثلث کے اندرونی اور نو نقطی
دائرہ کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ ۱ ہے۔
اس سے فیوریک کا مسئلہ حاصل کرو یعنی
ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی اور نو نقطی دائرہ
ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۷۵۔ ا ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے، اس میں
ا ب = ۳، بی ج = ۴، ج د = ۵ اور د ا = ۶ فٹ
اور اس کا رقبہ = ۳۳ + ۹ مربع فٹ، ثابت کرو کہ
ان شرائط کو پورا کرنے والی دو اشکال ذو اربعۃ الاضلاع

ہیں جن میں بالترتیب زاویہ ب کی قیمتیں جم [۱ - ۲۲، ۳۱]

یعنی تقریباً ۶۰° اور ۱۷۵° ۱۵ ہیں

۱۷۶۔ معادلات ذیل سے \sin بہ \sin کو ساقط کرو

$$\sin \theta + \sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

$$\sin \theta + \sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

$$\sin \theta + \sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

۱۷۷۔ معادلات ذیل سے \sin کو ساقط کرو

$$\sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

$$\sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

۱۷۸۔ معادلات ذیل سے \sin کو ساقط کرو

$$\sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$$

اور $\sin \theta + \sin \theta = \sin \theta$ $\sin \theta$ (۱۷۹)

۱۷۹۔ ایک دائرہ کا نصف قطر \sin ہے اور اس کے

اندروں اور \sin اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع

بنائی گئی ہیں ثابت کرو کہ ان تمام دندوں کے مجموعہ کا

مجموعہ جو ایک کثیر الاضلاع کے ایک کونے کو دوسری کثیر الاضلاع کے ایک

کونے کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتے ہیں \sin \sin

۱۸۰۔ ایک محیط دائرہ کے گرد \sin پتھر برابر برابر

فاصلوں پر ترتیب دیے گئے ہیں۔ ان سب کو دائرہ

کے مرکز تک اٹھا کر لیجانے میں جتنی محنت درکار ہو

اس کا مقابلہ اس محنت سے کرو جو ایک پتھر کے

گرد ان سب کا انبار لگانے میں درکار ہو

نیز ثابت کرو کہ اگر پتھروں ، تعداد کو لا انتہا بڑا دیا جائے تو یہ نسبت $\pi : m$ ہو جائے گی۔

۱۸۱۔ عمل ترسیبی سے یا کسی اور طرح سے مساوات $la + m = \frac{\pi}{p}$ کی ان قیمتوں کی تعداد دریافت کرو جو . . . اور $\frac{\pi}{p}$ کے درمیان واقع ہوں ، اور سب سے بڑی قیمت کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔
جدولوں سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۱۸۲۔ لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت دریافت کرو جو شرائط مساوات $ms - la = \frac{1}{p}$ کو پورا کرے
۱۸۳۔ جملہ جب لا کی ترسیم بناؤ اور ثابت کرو کہ اگر la ایک چھوٹی مثبت مقدار ہو تو مساوات $la - \frac{1}{p} = \frac{\pi}{p}$ جب $\frac{\pi}{p}$ کی تین حقیقی قیمتیں ہوں گی۔

۱۸۴۔ ثابت کرو کہ مساوات $la + m = \frac{\pi}{p}$ کی ایسی حقیقی قیمتوں کے تقریبات جو مقابلہ بڑی ہوں مساوات $la = \frac{m}{p} - \frac{\pi}{(m+p)}$ سے حاصل ہوتے ہیں

جہاں m کوئی بڑا طاق صحیح عدد ہے

۱۸۵۔ عمل ترسیبی سے مساوات $la + m = \frac{\pi}{p}$ کی تعداد سب سے چھوٹی مثبت اور منفی قیمتوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی بڑی قیمتوں کی تقریبی

قیمتیں مساوات $\lambda = n + \frac{(1-\lambda)}{11}$ سے حاصل ہوتی ہیں، اس میں n کوئی بڑی مقدار ہے۔

۱۸۶۔ ثابت کرو کہ مساوات $\lambda = 0$ کی قیمت جو صفر اور $\frac{1}{11}$ کے درمیان واقع ہے تقریباً 1.1547 ہے معلوم ہے کہ $1.1519 = 2.1224$ اور $1.1292 = 2.3559$

۱۸۷۔ اگر λ کوئی حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sin \lambda \text{ ہمیشہ } \lambda + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^4}{15} + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{1-2^n} + \dots$$

سے بڑا ہوگا

۱۸۸۔ اگر a, b, c یہ مستقل مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$\sin(a+b) + \sin(b+c) + \sin(c+a) = 0$$

کی قیمتوں کے چار مختلف مجموعے ہیں اور اگر ان مختلف مجموعوں کی کسی چار قیمتوں کو $\lambda, \mu, \nu, \omega$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $\lambda + \mu + \nu + \omega = 0$ کا ہفت ضعیف ہے۔

۱۸۹۔ اگر شرائط مساوات

$$\sin(a+b) + \sin(b+c) + \sin(c+a) = 0$$

$$\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) = 0$$

طے، طے، طے سے پوری ہو سکیں جن میں سے کسی دو کا فرق π قانون کے ضعیف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو

طہ + طہ + طہ + طہ + عہ + بہ + جہ ، $\Pi ۲$ کے کسی ضعیف کے برابر ہو گا

۱۹۰۔ ثابت کرو کہ بالعموم مساوات

$$۱ \text{ جب } ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ جب } ۳ \text{ لا} + ج = ۰$$

کی چھ مختلف قیمتیں ہیں جن میں سے کسی دو کا تفاوت $\Pi ۲$ کے برابر نہیں ہو سکتا ، نیز ثابت کرو کہ ان کے مجموعہ کا ماس $-\frac{1}{۲}$ ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$مس (طہ - عہ) + قط (طہ - بہ) = مم جہ$$

کی چار قیمتیں ایسی ہیں (جن میں سے کسی دو کا فرق $\Pi ۲$ کے اضعاف کے برابر نہیں) جو ربط ذیل کو پورا کرتی ہیں

$$طہ + طہ + طہ + طہ = ۲ (ن \Pi + عہ + بہ - جہ)$$

۱۹۲۔ اگر لا کی تین قیمتیں عہ ، بہ ، جہ مساوات

$$جب ۲ طہ (۱ جب لا + ۱ جب لا) = جب ۲ لا (۱ جب طہ + ۱ جب طہ)$$

کو پورا کریں اور ان میں سے کسی دو کا باہمی فرق یا ان میں سے کسی ایک اور طہ کا فرق $\Pi ۲$ کے کسی ضعیف سے تعبیر نہ ہو سکے تو ثابت کرو کہ

$$مس عہ مس چ مس چ مس چ مس طہ + ۱ = ۰$$

۱۹۳۔ اگر مساوات $۱ \text{ جب } ۲ طہ + ۱ \text{ جب } ۲ طہ + ج = ۰$

کی چار مختلف قیمتیں طہ ، طہ ، طہ ، طہ ہوں تو

$$ثابت کرو کہ $ج \text{ جب } طہ + طہ + طہ + طہ = ۰$$$

لاکی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہو جہاں مستقل مقداروں
 'پ'، 'پ'..... میں لا شامل نہیں ہے، تو ثابت کرو کہ
 ان مستقل مقداروں میں سے ہر ایک صفر کے برابر ہوگی

جوابات

امثلہ ۱ (صفحہ ۱۱-۱۲)

$$\frac{۴۵۵۶۹}{۶۴۸۰۰} - ۳ \quad \frac{۳۰۱}{۳۶۰} - ۲ \quad \frac{۲}{۳} - ۱$$

$$۴ \frac{۳۸۸}{۳۳۴۵} - ۶ \quad ۲ \frac{۳۶۶۱}{۱۰۸۰۰} - ۵ \quad ۱ \frac{۹}{۲۰} - ۳$$

$$۳ - ۴ \quad ۳۳۳۳ - ۳۳۳۳ \quad ۸ - ۹$$

$$۹ - ۱۰ \quad ۱۱ - ۱۲ \quad ۱۳ - ۱۴$$

$$۱۵ - ۱۶ \quad ۱۷ - ۱۸ \quad ۱۹ - ۲۰$$

$$۲۱ - ۲۲ \quad ۲۳ - ۲۴ \quad ۲۵ - ۲۶$$

$$۲۷ - ۲۸ \quad ۲۹ - ۳۰ \quad ۳۱ - ۳۲$$

$$۳۳ - ۳۴ \quad ۳۵ - ۳۶ \quad ۳۷ - ۳۸$$

$$۳۹ - ۴۰ \quad ۴۱ - ۴۲ \quad ۴۳ - ۴۴$$

$$۴۵ - ۴۶ \quad ۴۷ - ۴۸ \quad ۴۹ - ۵۰$$

$$۲۸ - ۵ \text{ ' } ۳۳ \text{ ' } ۲۰ \text{ ' } ۶۶ \text{ ' } ۴۰$$

$$۲۹ - ۴۷ \frac{۷}{۱۹} \text{ ' } ۲۲ \frac{۱۲}{۱۹} - ۳۱ - ۳۳ \text{ ' } ۲۰ \text{ ' } ۱۰ \text{ ' } ۴۸$$

امثلہ ۲ (صفحہ ۱۰-۱۸)

$$۱ - ۲۵۱۳۲۵۷۴ \text{ میں تقریباً}$$

$$۲ - ۱۹۵۲۸ \text{ میں تقریباً فی گھنٹہ}$$

$$۳ - ۱۲۵۸۵ \text{ میں تقریباً}$$

$$۴ - ۳۱۵۹۱۳۵۳ \text{ ایچ ۵ - } ۵۸۱۱۹۴۶۴۰ \text{ میں تقریباً}$$

$$۶ - ۱۴۵۹۹۴ \text{ میں تقریباً}$$

امثلہ ۳ (صفحہ ۲۲-۲۴)

$$۱ - ۶۰ - ۲ - ۲۴۰ - ۳ - ۱۸۰۰$$

$$۴ - ۵۷۱۸۱۴۱۸ - ۵ - ۵۸۱۱۹۴۶۴۰$$

$$۶ - ۱۴۰ - ۷ - ۲۳۳ - ۸ - ۲۳۳ - ۹ - ۲۳۳$$

$$۱۰ - \frac{۲۲۱}{۳۴} - ۱۱ - \frac{\pi}{۳} - ۱۲ - \frac{۳۵۵۷}{۱۳۵۰۰}$$

$$۱۳ - \frac{\pi}{۳۴} - ۱۴ - \frac{\pi}{۱۰}$$

$$۱۵ - \frac{۱۱۰۳}{۲۰۰۰} - ۱۶ - ۱۵۷۲۴۲۱۸$$

$$۱۷ - ۹۱ - ۱۸ - ۶۰ - ۶۱ - ۲۴$$

$$19 - 132 \div 15 \div 4 \div 2 - 20 - 20 - 20 - 20$$

$$21 - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$22 - \frac{\pi^3}{8} (1) - 10.8 - \frac{\pi^3}{8} (2) - \frac{\pi^3}{8} (2) - 128$$

$$\frac{\pi^3}{8} (3) - 135 - \frac{\pi^3}{4} (2) - 150 - \frac{\pi^3}{12} (5) - \frac{\pi^3}{12} (5) - 158$$

$$23 - 8 \text{ اور } 2 - 22 - 10 \text{ اور } 8$$

$$24 - \frac{\pi}{3} - 24 - 4 \text{ اور } 8$$

$$25 - \frac{\pi^3}{8} (1) - 25 = \frac{1}{8} \pi^3 - 25$$

$$26 - \frac{\pi^3}{18} (2) - 20 = \frac{2}{9} \pi^3 - 20$$

$$27 - \frac{\pi^3}{8} (3) - 112 = \frac{1}{4} \pi^3 - 112$$

$$28 - (1) \text{ بجکر } \frac{2}{11} \text{ اور } 4 \text{ منت پر}$$

$$(2) \text{ بجکر } \frac{2}{11} \text{ اور } 28 \text{ منت پر}$$

امثلہ ۴ (صفحات ۲۸ - ۳۱)

[فرض کرو کہ $\pi = 3.14159 \dots$ اور $\frac{1}{\pi} = 0.31831$]

$$1 - 25.3 \text{ تقریباً } - \frac{3}{5} \text{ نیم قطری } 3.14159$$

$$2 - 4.5 \text{ تقریباً } - 0.5236 \text{ (بج تقریباً)}$$

$$3 - 23.555 \text{ (بج تقریباً)} - 4 - 25.3 \text{ تقریباً}$$

۷- ۳۹۵۹۷۸ میل تقریباً ۸- ۱۱ فٹ = ۳۵۱۴۱۵۹ فٹ

۹- ۴:۵ ۱۰- ۳۵۱۴۱۴

۱۱- $\frac{۳۴}{۳۵}$ ، $\frac{۳۹}{۳۵}$ ، $\frac{۴۱۲}{۳۵}$ ، $\frac{۴۱۹}{۳۵}$ ، $\frac{۴۲۳}{۳۵}$ نیم قطر می

۱۲- ۹۵ ، ۲۴ ، ۳۰۰۳ ، ۱۳- ۲۰۴۲۶۵ فٹ تقریباً

۱۳- ۱۵۳۵۹ فٹ تقریباً ۱۵- ۲۴۲۶۴ فٹ تقریباً

۱۴- ۳۲۱۴۲۶۹ فٹ تقریباً ۱۷- ۳۸۱۹۷۶۲ فٹ تقریباً

۱۸- ۱۹۶۰۹۹ ۱۹- ۱۱۰۵۶۸ میل

۲۰- ۲۲۸۸۳۳ میل ۲۱- ۲۱۶۰۰ ، ۶۸۷۵۵۵ تقریباً

۲۲- ۱۰ × ۴۷۸ میل

امثلہ ۶ (صفحہ ۴۶-۴۷)

۵- $\frac{۱۵}{۳}$ ، $\frac{۱}{۵۲}$ ، دیگر ۶- $\frac{۱۲}{۱۳}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$

۷- $\frac{۱۱}{۴۰}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۴۱}{۴۰}$ ۸- $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۳}{۵}$

۹- $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ۱۰- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۵}{۴}$

۱۱- $\frac{۳}{۴}$ ۱۲- $\frac{۱۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱۷}{۸}$

۱۳- $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ۱۴- $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$

۱۵- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۵}{۱۳}$ ۱۶- $\frac{۵}{۱۳}$

$$\begin{array}{rcl}
 18 - \frac{1}{\frac{1}{36}} & & 14 - \frac{12}{13} \\
 20 - \frac{1}{\frac{1}{36}} & & 19 - \frac{1}{2} \\
 \frac{1+52}{1+52+52} + \frac{(1+52)52}{1+52+52} - 22 & & 21 - 71 + 1
 \end{array}$$

امثلہ ۸ (صفحات ۶۴-۶۸)

- ۱- ۳۴۹۳۳ فٹ ۲۰ فٹ ۲ - ۱۶۰ فٹ
- ۳- ۲۲۵ فٹ ۴- ۱۳۶۴۴ فٹ
- ۵- ۳۶۳۱۴ فٹ ۶- ۳۶۴۳۳ گز
- ۷- ۸۶۴۴ فٹ ۸- ۱۱۵۳۵۹ فٹ
- ۹- ۸۷۸۴۴ فٹ
- ۱۰- ۳۳۳۳۳ فٹ : ایک ستون سے ۷۵ فٹ کے فاصلے پر
- ۱۱- ۹۳۴۳۱ فٹ : ۵۳۴۳۱ فٹ
- ۱۲- ۱۳۶۴۴ میل ۱۳- ۳۰
- ۱۵- ۱۳۸۵۶۳ میل فی گھنٹہ
- ۱۶- ۲۵۰۹۸ فٹ : ۷۰۹۸ فٹ : ۸۵۹۸ فٹ
- ۱۷- ۵۶۳۲ = ۷۵۵۵ فٹ
- ۱۹- ۱۰ میل فی گھنٹہ ۲۰- ۸۶۴۴ گز

۲۱۔.....۶۹۲۵۸ گز

امثلہ ۹ (صفحات ۹۱-۹۳)

$$۱۔ \frac{۲۲۵۰}{۶۲۸۹} \pi \frac{۲۵۰۰}{۶۲۸۹} \pi \text{ اور } \frac{۸۱}{۳۳۱} \pi \text{ نیم قطری زاوے}$$

$$۲۔ ۹۸ \quad ۴۵ \quad ۱۷$$

$$۳۔ \frac{۲}{۱+۱} \quad \frac{۲}{۱-۱}$$

$$۸۔ \frac{۱}{\sin} - \frac{۱}{\sin} \quad ۹۔ ط = ۹۰$$

$$۱۰۔ \frac{۱}{۲} \text{ منٹ میں}$$

امثلہ ۱۰ (صفحات ۱۰۶-۱۰۷)

$$۴۔ ۲۵۳۰۹۴..... ۱۵۳۴۴$$

$$۵۔ ۲۵۳۰۹۴ - ۱۵۳۴۴.....$$

$$۶۔ ۲۵۳۰۹۴..... ۱۵۳۴۴ - ۲$$

$$۸۔ ۲۵۳۰۹۴..... ۱۵۳۴۴$$

$$۹۔ ۲۵ اور ۱۳۵ \quad ۱۰۔ ۲۰ اور ۲۴۰$$

$$۱۱۔ ۳۵ اور ۱۵۳ \quad ۱۲۔ ۱۵۰ اور ۳۳۰$$

$$۱۳۔ ۱۵۰ اور ۲۱۰ \quad ۱۴۔ ۲۱۰ اور ۳۳۰$$

$$۱۵۔ \text{جیم ۲۵} \quad ۱۶۔ \text{جب ۹}$$

$$۱۷۔ \text{میس ۳۴} \quad ۱۸۔ \text{جب ۱۲}$$

۱۹- جب ۱	۲۰- -مجم ۲۳
۲۱- جم ۲۳	۲۲- جم ۲۱
۲۳- جم ۲۵	۲۴- جم ۲۰
۲۵- -مجم ۲۶	۲۶- -مجم ۲۳
۲۷- -مجم ۲۹	۲۸- منفی
۲۹- منفی	۳۰- مثبت
۳۱- صفر	۳۲- مثبت
۳۳- مثبت	۳۴- مثبت
۳۵- منفی	

$$۳۶- \frac{۱}{۳۱} \text{ اور } \frac{۲۲-}{۳۱} , \frac{۱}{۳۱} \text{ اور } \frac{۲۱-}{۳۱}$$

امثلہ ۱۱ (صفحات ۱۱۷ - ۱۱۹)

۱- $\frac{n}{4}(1-) + n$	۲- $\frac{n}{3}(1-) - n$
۳- $\frac{n}{3}(1-) + n$	۴- $\frac{n}{3} \pm n$
۵- $\frac{n}{4} \pm n$	۶- $\frac{n}{3} \pm n$
۷- $\frac{n}{3} + n$	۸- $\frac{n}{3} + n$
۹- $\frac{n}{3} + n$	۱۰- $\frac{n}{3} \pm n$
۱۱- $\frac{n}{3}(1-) + n$	۱۲- $\frac{n}{3} \pm n$

$$\begin{array}{ll}
 ۱۳- \frac{\pi}{4} \pm \pi n & ۱۴- \frac{\pi}{4} \pm \pi n \\
 ۱۵- \frac{\pi}{4} \pm \pi n & ۱۶- \frac{\pi}{4} \pm \pi n \\
 ۱۷- \frac{\pi}{4} \pm \pi n & ۱۸- \frac{\pi}{4} + \pi(1+n^2)
 \end{array}$$

$$۱۹- \frac{\pi}{4} \pm \pi n^2$$

$$۲۰- \frac{\pi}{4} \pm \pi n \left(\frac{1}{4} + n \right) \text{ اور } \frac{\pi}{4} \pm \pi n \left(\frac{1}{4} - n \right)$$

$$\text{اور } \left(\frac{1}{4} - n \right) \pm \pi n \left(\frac{1}{4} + n \right) \text{ جہاں } m \text{ اور } n$$

کوئی صحیح عدد ہیں۔

$$۲۱- \frac{1}{4} \pm \pi n \text{ اور } \frac{1}{4} \pm \pi n$$

$$\frac{\pi}{4} \pm \pi n - \pi \left(\frac{1}{4} - n \right) \text{ اور } \frac{\pi}{4} \pm \pi n + \pi \left(\frac{1}{4} + n \right)$$

$$۲۲- (۱) \frac{\pi}{4} \text{ اور } \frac{\pi}{4} (۲) \frac{\pi}{4} \text{ اور } \frac{\pi}{4} (۳) \frac{\pi}{4} \text{ اور } \frac{\pi}{4}$$

$$۲۳- (۱) \frac{\pi}{4} (۲) \frac{\pi}{4} (۳) \frac{\pi}{4} (۴) \frac{\pi}{4}$$

امثلہ ۱۲ (صفحہ ۱۲۰-۱۲۲)

$$۱- \frac{\pi}{4} \pm \pi n \text{ اور } \frac{\pi}{4} \pm \pi n$$

$$۲- \frac{\pi}{4} \pm \pi n \text{ اور } \frac{\pi}{4} \pm \pi n$$

$$۵- \frac{\pi}{4} \pm \pi n \text{ اور } \frac{\pi}{4} \pm \pi n$$

$$- ط = ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi}{m} + \pi n = ط - ۷$$

$$- ط = ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi^2}{m} + \pi n = ط - ۸$$

$$- مس ط = ط - \frac{1}{3} \text{ یا } - \frac{1}{6} \quad - ۱۰ \quad ط = ط \pm \pi n = ط$$

$$- ط = ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi}{m} + \pi n^2 = ط$$

$$- ط \pm \pi n \text{ یا } \frac{\pi}{m} \pm \pi n^2 \quad - ۱۳$$

$$- ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi}{m} \pm \pi n^2$$

$$- جب ط = ۱ \text{ یا } - \frac{1}{m}$$

$$- ط = ط + \frac{\pi}{m}(1-) \text{ یا } \frac{\pi(1+n^2)}{10}$$

$$- ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi(1+n^2)}{5} \quad - ۱۹ \quad ط = ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi}{m}$$

$$. ط (\frac{1}{m} + n^2) \text{ یا } \frac{\pi}{m} - \pi n^2$$

$$. ط \pm \pi n^2 \text{ یا } \frac{\pi n^2}{9}$$

$$- ط = ط + \frac{\pi}{m} (\frac{1}{m} + n^2) \text{ یا } \frac{\pi}{m} (\frac{1}{m} - n^2)$$

$$- ط = ط (\frac{1}{m} + n) \text{ یا } \frac{\pi}{m} (\frac{1}{m} + m) \quad - ۲۳$$

$$. ط \pm \pi n \quad - ۲۶ \quad \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{14} + 1} \pm \frac{\pi n}{m}$$

$$-۲۷ \quad \frac{p}{q} \pm \frac{p}{q} \left(\frac{1}{p} + n \right) - ۲۸ \quad \frac{p}{q} \left(\frac{1}{p} + n \right)$$

$$-۲۹ \quad \frac{p}{q} \pm \frac{pn}{q} \quad -۳۰ \quad \frac{p}{q} \pm pn$$

$$-۳۱ \quad \frac{p}{m-n} \left(\frac{1}{p} + r \right)$$

$$-۳۲ \quad \text{مس ط} = \frac{1 + n^2 \pm \sqrt{15 - 2n + n^2}}{p} \text{ جہاں } n < ۱$$

یا $n > ۲$

$$-۳۳ \quad \text{ط} = \frac{p}{q} \pm pn \left(\frac{n}{p} + m \right) + \frac{p}{q} (1 - n)$$

$$\text{ع} = \frac{p}{q} (1 - n) - \frac{p}{q} \pm pn \left(\frac{n}{p} - m \right)$$

$$-۳۴ \quad \frac{1}{5} \left[\frac{p^2}{q} \mp \frac{p}{q} \pm pn (n^2 - m^2) \right] \text{ اور } \left[\frac{p}{q} \mp pn \pm pn (m^2 - n^2) \right] \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{p}{q} \mp pn \pm pn (m^2 - n^2) \right]$$

$$-۳۵ \quad ۲۵ \text{ اور } ۹۰ \quad -۳۶ \quad \frac{1}{p} \text{ یا } \frac{5}{p}$$

$$-۳۷ \quad \frac{1}{p} \pm ۵ \text{ یا } \frac{1}{p} \pm ۵$$

امثلہ ۱۳ (صفحات ۱۳-۱۳۱)

$$-۱ \quad - \frac{۱۳۳}{۲۰۵} - \frac{۸۴}{۲۰۵} - ۲ \quad \frac{۱۵۹۹}{۳۴۴۵} - \frac{۳۴۴۴}{۳۴۴۵}$$

$$-۳ \quad \frac{۲۲۰}{۲۱} - \frac{۱۷۱}{۲۲۱} - \frac{۲۲۰}{۲۲۱}$$

امثله ۱۴ (صفحات ۱۳۶ - ۱۳۹)

۳۰ - ۲ جب (ط + ن ف) جب $\frac{۲}{۴}$

۳۱ - ۲ جب (ط + ن ف) جم $\frac{۲}{۴}$

امثله ۱۵ (صفحات ۱۴۰ - ۱۴۱)

۱ - جم ۲ ط - جم ۱۲ ط ۲ - جب ۱۲ ط - جب ۲ ط

۳ - جم ۱۳ ط + جم ۸ ط ۴ - جم ۱۲ - جم ۱۲۰

امثله ۱۶ (صفحات ۱۴۵ - ۱۴۶)

۱ - ۳ ' $\frac{۹}{۱۳}$ ۳ - ۱

امثله ۱۷ (صفحات ۱۵۵ - ۱۵۸)

۱ - (۱) $\frac{۲۴}{۲۵} \pm$ (۲) $\frac{۱۲۰}{۱۴۹} \pm$ (۳) $\frac{۲۰۱۶}{۲۲۲۵}$

۲ - (۱) $\frac{۱۶۱}{۲۸۹}$ (۲) $\frac{۴}{۲۵} -$ (۴) $\frac{۱۱۹}{۱۴۹}$

۳ - ۱

امثله ۱۸ (صفحات ۱۴۲ - ۱۴۶)

۱ - $\frac{\sqrt{۱۸} \pm \sqrt{۳۶} \pm}{۱۸}$ ' $\frac{\sqrt{۳۶} \pm \sqrt{۱۶} \pm}{۴}$

۲ - $\frac{۱۴۹}{۱۳۶}$ ' $\frac{۱۳۶}{۳} \pm \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱۳۶}{۲} \pm$ ' $\frac{۱۳}{۱۲} \pm$

$$\frac{2}{\sqrt{h}} - 3 \quad \frac{29}{3.5} - \frac{14}{3.5} - 3$$

$$\frac{2}{\sqrt{h}} \pm -4 \quad \frac{2}{\sqrt{h}} \pm \frac{1}{\sqrt{h}} \pm -5$$

$$1 - \sqrt{h} \quad \frac{\sqrt{h} + \sqrt{h} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}} \quad \frac{\sqrt{h} - \sqrt{h} - \sqrt{h}}{\sqrt{h}} - 6$$

$$\sqrt{h} + \sqrt{h} + (1 + \sqrt{h}) -$$

$$- اور - 23 \quad \frac{\sqrt{b-3} - \sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{b}} - 8$$

$$- اور - 25 \quad - اور - 24$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 (1) - 29$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 (2)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} - \pi \cup 2 (3)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 (4)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} - \pi \cup 2 (1) - 3$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 (2)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{h}} + \pi \cup 2 (3)$$

امثلہ ۱۹ (صفحات ۱۸۰-۱۸۱)

۱۲- ناویہ کی جیب ۲ جب ۱۸ کے برابر ہے

۱۳- $\frac{\pi}{\pi} \text{ یا } (\frac{1}{\pi} \pm \pi^2)$

امثلہ ۲۱ (صفحات ۱۹۸-۲۰۰)

۱- $\frac{\pi}{\pi} \text{ یا } \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{\pi} \pm \pi^2)$

۲- $\frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} + \pi) \text{ یا } \frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} \pm \pi^2)$

۳- $\pi \text{ یا } \frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} + \pi)$

۴- $\frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} + \pi) \text{ یا } \pi \text{ یا } \pi (-1) + \frac{\pi}{\pi}$

۵- $\frac{\pi^2}{\pi} \text{ یا } \pi (\frac{1}{\pi} + \pi) \text{ یا } \pi (\frac{1}{\pi} - \pi^2)$

۶- $\frac{\pi}{\pi} \text{ یا } \frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} \pm \pi^2)$

۷- $\frac{\pi^2}{\pi} \pm \pi \text{ یا } \frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} + \pi)$

۸- $\pi \text{ یا } \frac{\pi}{\pi} (\frac{1}{\pi} \pm \pi)$

۹- $\pi \text{ یا } \pi (\frac{1}{\pi} + \frac{\pi^2}{\pi})$

۱۰- $\pi \text{ یا } \pi (-1) + \frac{\pi}{\pi} \text{ یا } \pi (-1) - \frac{\pi}{\pi}$

$$\frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + \Omega \right) \leq \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\gamma} + \Omega \right) \quad -11$$

$$\left[\frac{\pi^2}{\gamma} (1 -) - \pi \mu \right] \frac{1}{1 - \Omega} \leq \pi \mu \quad -12$$

$$\frac{\pi}{\gamma} (1 + \gamma^2) \leq \frac{\pi \gamma^2}{\Omega + \gamma} \quad -13 \quad \frac{\pi \gamma^2}{1 \pm \Omega} \leq \pi \mu^2 \quad -13$$

$$\frac{\pi}{\Omega \pm \gamma} (1 + \gamma^2) \quad -15$$

$$\frac{\pi}{\Omega} \left(\frac{1}{\gamma} + \mu \right) \leq \frac{\pi \mu}{1 - \Omega} \leq \pi \mu \quad -14$$

$$\left(\frac{\pi}{\gamma} - \pi \Omega^2 \right) \frac{1}{\delta} \leq \frac{\pi}{\gamma} - \pi \Omega^2 \quad -16$$

$$\frac{\pi}{\gamma} + \pi \Omega^2 \quad -17 \quad \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\pi^2}{\gamma} (1 -) + \pi \Omega \quad -18$$

$$1 \pm \frac{\pi}{\gamma} + \pi \Omega^2 \quad -19 \quad \frac{\pi}{\gamma} (1 -) + \frac{\pi}{\gamma} + \pi \Omega \quad -20$$

$$[i\gamma^2] \Omega (1 -) + i\lambda \cdot x \Omega + \gamma \lambda \gamma \quad -21$$

$$i\lambda \gamma^2 + i\lambda \cdot x \Omega^2 \quad ' \quad \delta \lambda \gamma^2 + i\lambda \cdot x \Omega^2 \quad -22$$

$$\gamma \gamma^2 \gamma^2 + i\lambda \cdot x \Omega \quad ' \quad \gamma \delta + i\lambda \cdot x \Omega \quad -23$$

$$\frac{\pi}{\gamma} + \pi \Omega^2 \leq \pi \Omega^2 \quad -24 \quad \frac{\pi^2}{\gamma} + \pi \Omega^2 \quad -25$$

$$\frac{\pi}{\gamma} + \pi \Omega^2 \quad -26 \quad \frac{\pi}{\gamma} - \pi \Omega^2 \leq \frac{\pi}{\gamma} + \pi \Omega^2 \quad -27$$

$$\frac{1 - i\gamma^2}{\lambda} \leq \text{جب ط} \quad -28 \quad \pi \Omega \quad -29$$

۲ باب

اور
۵ باب + ۳ اج - ۲ ب - ۱ ج

جہاں ۱ = نوک ۲، ب = نوک ۳ اور ج = نوک ۷

۸ - ۲۲۲۲۱ ۹ - ۸۵۶۴۱۵ ۱۰ - ۱۶۱۹۲

۱۱ - ۱۵۶۳۸۹ ۱۲ - ۴۵۷۱۶۲ ۱۳ - ۱۴۳۱

امثلہ ۲۴ (۲۳۸ - ۲۴۱)

۱ - ۱۵۵۲۷۳۹۲ ' ۴۵۵۲۷۳۷۵

۲ - ۴۷۸۹۵۰۲ ' ۴۷۸۹۵۲۹

۳ - ۴۷۸۴۷۷۷ ' ۴۷۸۴۷۷۷

۴ - ۲۵۸۳۶۷۲ ' ۲۵۸۳۶۷۲

۵ - ۴۷۲۰۴۸۱۵ (۱) ۴۷۲۰۴۷۲ (۲)

۳ (۳) ۴۷۲۰۴۷۷۷ (۴) ۴۷۲۰۴۷۷۷ (۵)

۴ (۴) ۴۷۲۰۴۷۷۷ (۵) ۴۷۲۰۴۷۷۷ (۶)

۷ - ۴۷۸۷۰۴۱۷ ۸ - ۴۷۸۷۰۴۱۷

۹ - ۴۷۸۷۰۴۱۷ ' ۴۷۸۷۰۴۱۷

۱۰ - ۴۷۸۷۰۴۱۷ ' ۴۷۸۷۰۴۱۷

۱۱ - ۴۷۸۷۰۴۱۷ ' ۴۷۸۷۰۴۱۷

۱۲ - ۴۷۸۷۰۴۱۷ ' ۴۷۸۷۰۴۱۷

۱۳ - ۴۷۸۷۰۴۱۷ ' ۴۷۸۷۰۴۱۷

- ۱۴- ۲۲ ۲۲ ۲۷
 ۱۵- ۲۲ ۲۷ ۲۱ ۲۵ ۲۵ ۲۲ ۲۷
 ۱۶- ۲۷ ۲۷ ۱۸ -۱۷ ۱۰۵۰۲۲۹۲۱۲
 ۱۸- ۲۲ ۲۲ ۲۲

امثلہ ۲۵ (صفحات ۲۲۹-۲۵۱)

- ۱- ۲۷ ۲۷ ۲۲ -۲ ۲۲ ۲۲
 ۳- ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۵ ۲۲ ۲۷
 ۴- ۲۷ ۲۲ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 ۵- ۲۷ ۲۲ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 ۷- ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 ۸- ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 ۹- ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 ۱۰- (۱) ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷ (۲) ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 (۳) ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 (۴) ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 (۵) ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷
 (۶) ۲۷ ۲۷ ۲۲ ۲۷ ۲۲ ۲۷

- ۵- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۶ ۲۵ ' ۶۰ ' ۲۵
 ۷- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۸ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۹- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۰ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۱۱- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۱ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۱۲- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۲ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۱۳- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۳ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵

امثلة (صفحات ۱۲۸۴ تا ۱۲۹۰)

- ۱- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۲- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۲ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۳- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۳ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۴- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۴ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۵- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۵ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۶- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۶ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۷- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۷ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۸- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۸ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۹- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۹ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۱۰- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۰ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۱۱- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۱ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵
 ۱۲- ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵ -۱۲ ۲۵ ' ۱۲۰ ' ۲۵

- ۹- ۱۷۱ یا ۳۵۸
- ۱۰- (۱) شلٹ قائم الزاویہ ہے اور ب = ۴۰
- (۲) ب = ۳۸۹۳، ب = ۸، م = اور ج = ۱۹
- ب = ۱۱، ۱۹ اور ج = ۳۸، م
- ۱۱- ۹۵، ۵۹ اور ۱۴، ۵۶، ۲
- ۱۲- ۵۹۸۸ اور ۲۵۶۱۸ میں نی گنندہ
- ۱۳- ۳، ۲، ۱۲ یا ۱۱۶، ۵۷، ۳۸
- ۱۴- ۹۲، ۳، ۲۳ اور ۱۰۲، ۷، ۳۷
- یا ۱۷، ۲۸، ۳۷ اور ۳۷، ۲، ۲۳
- ۱۵- ۵۹۲۵۶۱

امثلہ ۳۲ (صفحات ۳۰۱-۳۰۳)

- ۱- ۷ : ۹ : ۱۱
- ۴- ۷۹۵۰۶۳
- ۵- ایل، ۱۲۱۹۷۱۴ ایل ۷- ۲۰۹۷۱۴ فٹ
- ۸- ۶۵۸۵۶۷۳ اور ۵۷۳۷۸۲۶۸ فٹ
- ۹- ۴۳۵۲ و ۴۰۴ فٹ
- ۱۰- ۲۳۳۳ و ۲۸۸۳ گز ۱۱- ۲۲۲۹ گز

امثلہ ۳۳ (صفحات ۳۱۰-۳۱۶)

- ۱- ۱۰۰ فٹ اونچا اور ۵۰ فٹ چوڑا، ۲۵ فٹ
- ۲- ۲۵۷۸۳۲ گز ۳- ۳۳۵۰۷ فٹ، ۱۷ فٹ

- ۳- ۱۸۵۳ فٹ
۴- ۱۲۰ فٹ
۵- ۱۹۳۹۲ فٹ
۶- ح مس عم بہ
۷- ۱۰۰ فٹ
۸- ۱۰۰ فٹ
۹- ۱۰۰ فٹ
۱۰- ۱۰۰ فٹ
۱۱- ۱۰۰ فٹ
۱۲- ۱۰۰ فٹ
۱۳- ۱۰۰ فٹ
۱۴- ۱۰۰ فٹ
۱۵- ۱۰۰ فٹ
۱۶- ۱۰۰ فٹ
۱۷- ۱۰۰ فٹ
۱۸- ۱۰۰ فٹ
۱۹- ۱۰۰ فٹ
۲۰- ۱۰۰ فٹ
۲۱- ۱۰۰ فٹ
۲۲- ۱۰۰ فٹ

امثلہ ۳۳ (صفحات ۳۲۱-۳۲۲)

- ۳- ۲۰ فٹ ، ۲۰ فٹ
۴- ل قم جب جہاں جہ سورج کا ارتفاع ہے
جب جہ = $\frac{1}{2}$
۵- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۶- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۷- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۸- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۹- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۰- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۱- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۲- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۳- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۴- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۵- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۶- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۷- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۸- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۱۹- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۲۰- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۲۱- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ
۲۲- ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۳۲۰۰۰ فٹ ، ۱۲۰۰۰ فٹ

- ۶۔ ۱۰۶۲۴۲۴ میل فی گھنٹہ
 ۷۔ ۱۴۶۳۹۲۳ میل۔ ۱۴۶۹۶۶ میل
 ۸۔ ۲۳۹ میل، ۱۳۶۶ میل
 ۹۔ نادیر مطلوبہ کا کاس $\frac{2}{3}$ ہے، $\frac{9}{54}$ گھنٹہ
 ۱۳۔ ج جب بد قم (عہ + بد) ج جب عہ جب بد قم (عہ + بد)
 ۱۴۔ ۹ گز، ۲ گز ۱۴ - $\frac{1}{3}$ ، $\frac{12}{3}$
 ۲۰۔ ٹیلے سے $\frac{365}{24}$ فٹ کے فاصلہ پر
 ۲۱۔ ج (۱- جب عہ) قطعہ ۲۲ - ۱۱۴۶۴۱۲۳ فٹ
 ۲۳۔ ۱۰۶۹۶۴۵۶۴۵ فٹ ۲۶ - ایک ایسا زاویہ جس کا کاس $\frac{1}{2}$ ہے
 ۲۹۔ ۲۵ - ۳۲ - ۱۸ ۲۶ ۶
 ۳۴۔ مسقطیہ: ۱ - ۳۷ - ۹۱۵۸۹۶ فٹ
 ۳۸۔ ۱۹۶۰۶۹۵ گز ۳۹ - ۲۵۸۳۲ میل
 ۴۰۔ ۳۳۳۳۳۳۳۳ فٹ

امثلہ ۵۳ (صفحات ۳۳۳، ۳۳۴)

- ۱۔ ۸۴ - ۲ - ۲۱۶ - ۳ - ۶۳۰
 ۳۔ ۳۷۲۰ - ۵ - ۲۷۰ - ۶ - ۱۱۷۰۹۶
 ۷۔ ۱۴۷۰ - ۸ - ۱۵۱۸۳
 ۱۲۔ ۳۵ گز اور ۲۶ گز ۱۳ - ۱۳۶۹۴۱ - ۱۴ - ۱۴

۱۴- ۵' ۷' ۸' فٹ ۱۵- ۱۲۰

۱۵- ۵' ۷' ۸' اور ۱۰' ۱۵' اور ۱۵

۱۸- ۱۰' ۱۵' ۱۷' مربع انچ

امثلہ ۳۷ (صفحات ۳۷۵ تا ۳۷۷)

۳- ۸' ۱۰' ۱۱' ۱۲' ۱۳' بالترتیب

امثلہ ۳۷ (۳۷۹ - ۳۸۲)

۳۵- ہر ایک دائرہ کے نصف قطر کا..... ۱۵' ۱۷' یا ۱۵' ۱۷' گنا

۳۹- ۸' = ۱۱' + (۱ - ۱۱') × ۲ × ۱۱' (۱ - ۱۱').....

امثلہ ۳۸- (صفحات ۳۸۱ تا ۳۸۳)

۱- (۱) ۱۵' ۱۷' مربع فٹ (۲) ۱۰' ۱۵' مربع فٹ

۳ ۱۱' اور ۱۲' فٹ

امثلہ ۳۹ (صفحات ۳۸۷ تا ۳۹۰)

۱- ۱۸' ۱۷' ۱۹' ۲۰' ۲۱' ۲۲' ۲۳' ۲۴' ۲۵' ۲۶' ۲۷' ۲۸' ۲۹' ۳۰' ۳۱' ۳۲' ۳۳' ۳۴' ۳۵' ۳۶' ۳۷' ۳۸' ۳۹' ۴۰' ۴۱' ۴۲' ۴۳' ۴۴' ۴۵' ۴۶' ۴۷' ۴۸' ۴۹' ۵۰' ۵۱' ۵۲' ۵۳' ۵۴' ۵۵' ۵۶' ۵۷' ۵۸' ۵۹' ۶۰' ۶۱' ۶۲' ۶۳' ۶۴' ۶۵' ۶۶' ۶۷' ۶۸' ۶۹' ۷۰' ۷۱' ۷۲' ۷۳' ۷۴' ۷۵' ۷۶' ۷۷' ۷۸' ۷۹' ۸۰' ۸۱' ۸۲' ۸۳' ۸۴' ۸۵' ۸۶' ۸۷' ۸۸' ۸۹' ۹۰' ۹۱' ۹۲' ۹۳' ۹۴' ۹۵' ۹۶' ۹۷' ۹۸' ۹۹' ۱۰۰'

۳- (۱) ۱۵' ۱۷' مربع فٹ (۲) ۱۰' ۱۵' مربع فٹ

(۳) ۱۵' ۱۷' مربع فٹ (۴) ۱۰' ۱۵' مربع فٹ

(۵) ۱۱' ۱۲' مربع فٹ

۴- ۱۵۸۸۶۶ مربع فٹ ۵- ۳۳۱۳۶ مربع فٹ

۶- $۲: ۲۶ + ۲۶$ ' $۳: ۲۶ + ۲۶$

۱۲- ۳ ۱۴- ۶

۱۵- ۹ ۱۶- ۱۰ اور ۲۰

۱۷- ۶ اور ۵ ' ۱۲ اور ۸ ' ۱۸ اور ۱۰

۲۲ اور ۱۱ ' ۲۷ اور ۱۴ ' ۴۲ اور ۱۴

۴۴ اور ۱۵ ' ۷۲ اور ۱۶ ' ۱۰۲ اور ۱۷

۱۶۲ اور ۱۸ ' ۳۴۲ اور ۱۹ اضافی ذریعہ

۱۹- $\frac{۲}{۳}$ ' $\frac{۲}{۳}$

امثلہ ۴۰ (صفحات ۳۸۶-۳۸۸)

۱- ۲۰۳ ۲- ۷۰۰۰۰

۳- ۹۰۰۰ ۴- ۹۹۹۹۹

۵- ۲۵۷۸۳۱۰۰۷۷ ۶- ۱۵۰۰۰۰۰۱۱

۷- ۲۳ ' ۲۳ ۸- ۲۸ ' ۲۸

۹- ۳۹ ' ۳۹ ۱۰- ۳۳ ' ۳۳

۱۱- ۱۱۳۵۹

امثلہ ۴۱ (صفحات ۳۸۹-۳۹۱)

۱- ۳۳۵۷۷۷ مربع فٹ ۲- ۴۹۰۸۷۷ مربع فٹ

۳- ۱۲۷ ' ۱۹ ' ۲۶ ' ۴- ۶ مربع فٹ

- ۵ - ۴۰۰۰ ۱۱ پانچ
۶ - ۴۰۰۰ ۲۲ پانچ
۷ - ۴۰۰۰ ۳۳ پانچ
۸ - ۴۰۰۰ ۴۴ پانچ
۹ - ۴۰۰۰ ۵۵ پانچ

امثلہ ۴۲ (صفحات ۳۹۳-۳۹۵)

- ۱ - ۱ ۸ ۴۵
۲ - ۱ ۸ ۴۵
۳ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۵ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۶ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۷ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۸ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۹ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً

امثلہ ۴۳ (صفحات ۴۰۲-۴۰۴)

- ۱ - ۱ ۸ ۴۵
۲ - ۱ ۸ ۴۵
۳ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۵ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۶ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۷ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۸ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۹ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۰ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۱ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۲ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۳ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۴ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۵ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۶ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۷ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۸ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۱۹ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۰ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۱ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۲ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۳ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۴ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۵ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۶ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۷ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۸ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۲۹ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۰ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۱ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۲ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۳ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۴ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۵ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۶ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۷ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۸ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۳۹ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۰ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۱ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۲ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۳ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۴ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۵ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۶ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۷ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۸ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۴۹ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً
۵۰ - ۱ ۸ ۴۵ تقریباً

۴۱ - لا مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

لا- لا (اب + ا ج + ا د + ب ج + ب د + ج د) + ا ب ج د =

$$۲۲ - لا = لا + ب$$

$$۲۳ - ا ب + [ا(لا - ا) + ا(ب - ا)]$$

$$۲۴ - \frac{ب - ا}{ا + ا}$$

امثله ۲۲ (صفحات ۲۱۳ - ۲۱۶)

$$۱ - \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۲ \text{ ن طه قمره}$$

$$۲ - \text{جم } \frac{۱ - ۲}{۳} \text{ ا ب } \frac{۳}{۳} \text{ ن } \frac{۱}{۳} \text{ ا قمره } \frac{۱}{۳}$$

$$۳ - \frac{۱}{۲}$$

$$۴ - \text{جب } [ع + (ن - \frac{۱}{۲})] \text{ ب ن به قط } \frac{۱}{۲}$$

$$۵ - \text{جب } \frac{ن - ۲}{۲}$$

$$۶ - \text{جب } ۲ \text{ ن لا (جم } ۲ \text{ ن لا + جب } ۲ \text{ ن لا) (جم لا + جب لا) قمره } ۲$$

$$۷ - \frac{۱}{۲} [(ن + ۱) \text{ جب } ۲ ع - \text{جب } (۲ + ن) ع] \text{ قمره}$$

$$۸ - \frac{۱}{۲} \text{ جب } (۲ + ن) ع \times \text{جب } ۲ \text{ ن ع قمره}$$

$$۹ - \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۲ ع - \frac{۱}{۲} \text{ جم } (ن + ۳) ع \text{ جب } ۲ \text{ ن ع قمره}$$

$$۱۳- \frac{\text{جم}(۲ع-ع) \text{جم}(۱+ن) \text{بد-جم}(۲ن+ع) \text{جم}ن \text{بد+جم}ع(۱-جم)}{۲(\text{جمبد-جم}۲ع)}$$

$$۱۴- \frac{۱}{ن} [(۱+ن۲) \text{جب}ع- \text{جب}(۱+ن۲)ع] \text{قم}ع$$

$$۱۵- \frac{ن}{۴} - \frac{۱}{۴} \text{جم} [۲ط+ (۱-ن)ع] \text{جب}ن \text{ع} \text{قم}ع$$

$$۱۶- \frac{۳}{ن} \text{جب} \frac{۱+ن}{۲} ع \text{جب} \frac{ن}{۲} ع \text{قم} \frac{ع}{۲}$$

$$- \frac{۱}{ن} \text{جب} ۳ \frac{۱+ن}{۲} ع \times \text{جب} \frac{۳ن}{۲} ع \text{قم} \frac{ع}{۲}$$

$$۱۷- \frac{۱}{۸} [(۳ن-۴جم) (۱+ن) ع \text{جب}ن \text{ع} \text{قم}ع$$

$$+ \text{جم}(۲+ن۲) ع \text{جب}۲ن \text{ع} \text{قم}۲ع]$$

$$۱۸- \frac{۱}{۸} [(۳ن+۴جم) (۱+ن) ع \text{جب}ن \text{ع} \text{قم}ع$$

$$+ \text{جم}(۲+ن۲) ع \text{جب}۲ن \text{ع} \text{قم}۲ع]$$

$$۱۹- \frac{۱}{ن} \text{جب} \frac{ن}{۲} ط [\text{جم} \frac{۱-ن}{۲} ط + \text{جم} \frac{ن}{۲} ط + \text{جم} \frac{ن}{۲} ط + \text{جم} \frac{ن}{۲} ط] \text{قم} \frac{ط}{۲}$$

$$+ \frac{۱}{ن} \text{جب} \frac{۳ن}{۲} ط \text{جم} \frac{۳ن}{۲} ط + ۹ \frac{ط}{۲} \text{قم} \frac{ط}{۲}$$

$$۲۰- \frac{۱}{ن} \text{جب} (۲ع+۲ن \text{بد}) \text{جب}۲ن \text{بد} \text{قط} \text{بد}$$

۱. مثله ۴۵ (صفحات ۲۲۲-۲۲۳)

$$۱- ۱ + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۲ - \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \text{جم (ب-ع) (ب-ع) (ب-ع)} = \text{ب (ع-ب)}$$

$$۳ - ۱ (ج۲ - د۱) = \text{ب د ج}$$

$$۴ - ۱ \text{ب ب ع} + \text{ب جم ع} = ۲ \text{ب (ب+د)}$$

$$۵ - ۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$$

$$۶ - ۱ + \text{ب} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$$

$$۷ - (ف۱ + ۱) ۲ ق (ف۱ + ۱) (ق + ف) = ۴ (ق + ف) ۲$$

$$۸ - (لا۱ + ما۱ - ب۲) = ۱ [(لا + ب) ۲ + ما۱]$$

$$۹ - ۱ + ب۲ = ۲ + ۲ \text{جم ع}$$

$$۱۰ - لا ما = (ا - لا) \text{مس ع}$$

$$۱۱ - ۱ (ج - د) (د - ۱) = \text{ب (ب-ج) (ب-د)}$$

$$۱۲ - ۸ \text{ب ج} = ۱ \{ ۴ \text{ب} + (ب - ج) ۲ \}$$

$$۱۳ - لا (ج - د - ب۱)$$

$$= \text{ما (ب+د) (ب+ج) (ب+د) (ب+ج) (ب+د) (ب+ج)}$$

$$۱۴ - \text{ب [لا (ب-د) ۱ + (ب+د) ۲]} = \text{ج [ب (لا+د) ۲]}$$

متفرق مثالین (صفحات ۳۳۲-۳۸۰)

۴- ۱۴۲ فٹ تقریباً ' ۳۰ ' ۲ تقریباً

۵- ۴۱ ' ۵۰ ' ۶۱ فٹ

۷- جب (بد-عد) = \pm ۱۴-۱۱-۱۰-۹-۸-۷-۶-۵-۴-۳-۲-۱

۹- ۲۸ + ۱۱ = ۳۹

۱۰- $\frac{11}{12} \left(\frac{1}{12} + \text{ن} \right)$ ۱۲- ۳-۷-۵-۲

۲۱- (۱) ط = ن + ۱۱ + (۱-۱) $\frac{11}{12}$

یا مس ط = (۱-۱) قم + قم (ب) مس $\frac{11}{12}$

(۲) ط = ن + ۱۱ یا (ن \pm $\frac{1}{12}$) $\frac{11}{12}$

۲۲- ۱۵ ' ۱۹ ' ۲۸ ' ۲۸ ' ۱۰۸ ' ۱۳

۲۳- ۱۲۹۸ فٹ تقریباً ' ۱۳ ' ۳۱ جنوب سے مشرق کی طرف کو۔

۲۸- ۸۰ فٹ ۳۰- $\frac{1}{12}$ مس لا ' $\frac{لا+ما}{لا-۱}$

۳۱- $(\text{ل} + ۱) (م + ۱) = (ن - ۱) (م + ۱)$

۳۲- دو قیمتیں

۳۵- $\frac{11}{12} \left(\frac{1}{12} \pm \text{م} \right)$ ' $\frac{11}{12} \left(\frac{1}{12} \pm \text{ن} \right)$

- ۴۷ - (لہ-۱) = ۲۷ لہ جم ع جب ع
- ۴۸ - ۱۳۹ ۱۳۹ نیقطری = ۲۹ ۳۰ تقریباً
- ۴۹ - جب (بہ-جہ) قط (عہ-بہ) قط (عہ-جہ)
- ۵۰ - ۱۱ ۱۲ مشرق سے شمال کی طرف کو
- ۵۱ - چھ قیمتیں ۵۸ - $\frac{1}{11} [ن + \frac{11}{2} - ع - بہ - جہ]$
- ۵۲ - ۷۲ ۷۲ فٹ
- ۵۳ - ج $\frac{1}{11} ۱۱۸ = \frac{1}{11} ۱۱۸ - (ب-۱) ۱۱۸$
- ۵۴ - $\frac{1}{11} ۱۱۸ - ۶۴ - ۱۹ ۱ - ۲۸ \frac{1}{11} + ۵۰ \frac{1}{11}$ تقریباً
- ۵۵ - ا جب ع جب بہ
ا جب (بہ-عہ) جب (بہ+عہ)
- ۵۶ - جم (عہ+بہ+جہ+لہ) + جم (عہ+بہ-جہ-لہ)
+ جم (عہ-بہ+جہ-لہ) + جم (عہ-بہ-جہ+لہ) + جم (عہ+بہ+جہ+لہ)
- جم (عہ-بہ+جہ+لہ) - جم (عہ+بہ-جہ-لہ) - جم (عہ+بہ+جہ-لہ) - جم (عہ-بہ-جہ+لہ)
- ۵۷ - ۶۶ $\frac{1}{11} ۱۹$ تقریباً ۸۰ - ۱۱ - ۲۵ ۳۱ ۲۵
- ۵۸ - مس طہ = ۲ ۱۱ یا ۲ ۱۱
- ۵۹ - مس فہ = ۲ ۱۱ یا ۲ ۱۱
- ۶۰ - ۱۶ ۱۶ میل

$$۸۷ - ۲۷ = ۶۰ = ۲(۸ - ۹) \text{ لا}$$

$$۹۲ - ۲۲ = ۷۰ = ۳(۱ + ۱) \text{ ج}$$

$$۹۵ - \text{جب } \frac{۲}{۲} \text{ جب } \frac{(۳+۲)}{۲} \text{ ط } [۲+۲] \text{ ط } \frac{۲}{۲} \text{ ق م } \frac{۲}{۲} \\ - \text{جب } \frac{۳+۲}{۲} \text{ ط } \frac{۳}{۲} \text{ ق م } \frac{۳}{۲}$$

$$۹۶ - ۲۵۵ \text{ نیقطری} = ۱۳۴ \text{ تقریباً}$$

$$۱۰۲ - \text{مس ط} = ۱ - ۱ - ۲$$

$$۱۰۸ - ۲۳۷ \text{ فٹ} = ۱۱۷ - ۱۱$$

$$۱۲۰ - \text{لا} + \text{لا} = ۲ + ۲ \text{ ب}$$

$$۱۲۸ - (۲ + ۲) = ۲۲ = \frac{۸}{۲} \text{ اب}$$

$$۱۳۴ - (۲ + ۲) + (۲ - ۲) = ۲ = \frac{۲}{۲} \text{ ج}$$

$$- ۱۳۸$$

$$\frac{\text{م ج} + \text{ن م} + \text{م ج} + \text{ن م} + \text{م ج} + \text{ن م} + \text{م ج} + \text{ن م}}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{جہاں مس ب} = (\text{م ج جب ج} + \text{ن م جب م}) + (\text{م ج جب م} + \text{ن م جب ج})$$

$$۱۳۶ - \text{م} + \text{م ج م} = ۲ = ۱۳۸ - \frac{۲}{۲} - \frac{۲}{۲} = ۱۳۶$$

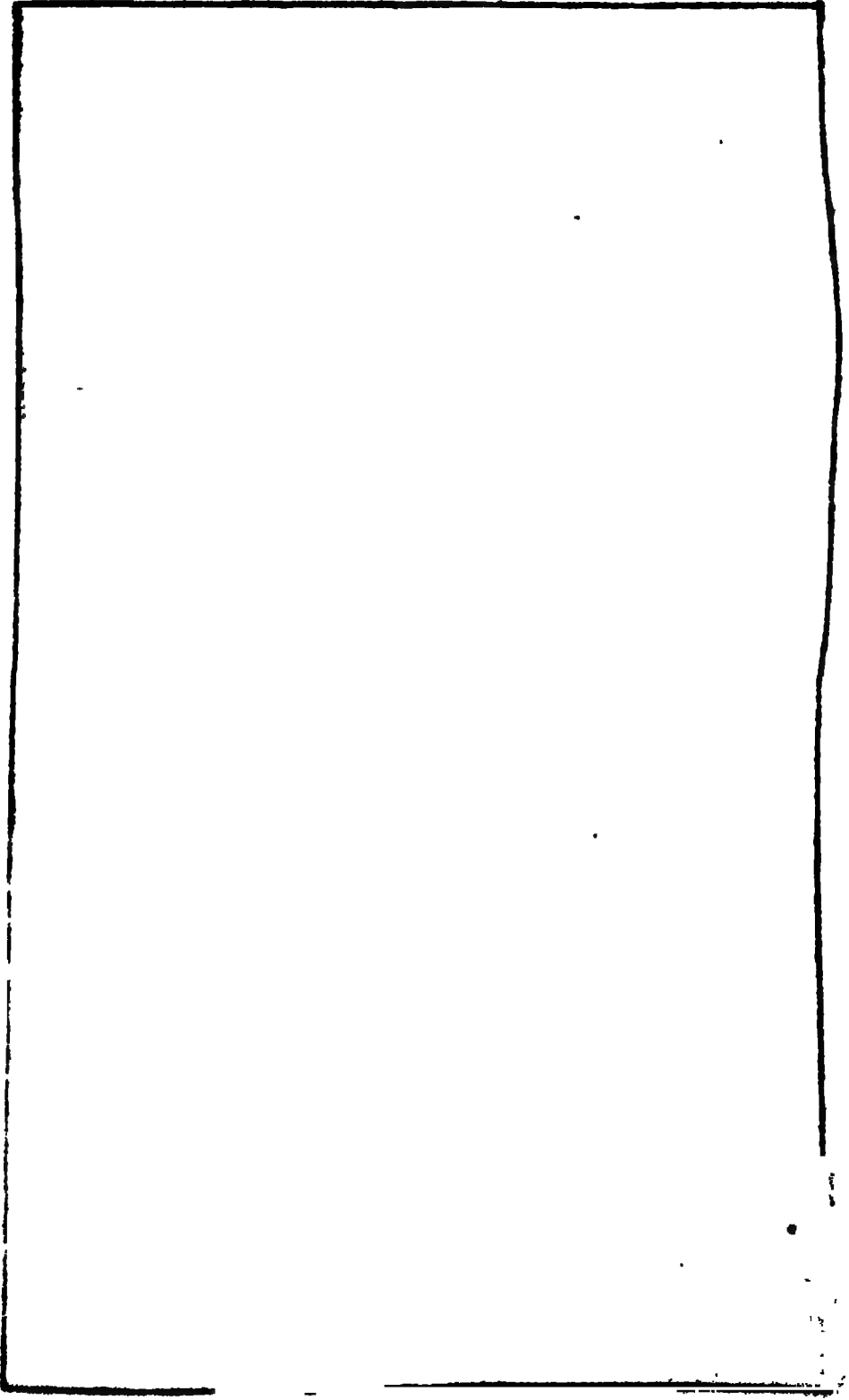
$$۱۵۱ - (\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}) = ۲(۲ + ۲) \text{ لا}$$

- ۱۶۱- (۱- لا- م) جب (ع- لہ) جب (ب- جہ) جب
 ۱۶۲- ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰ جب ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰
 ۱۶۳- لا- م- ۴ لا- م- (لا- م) ۴ مس (ب- جہ)
 ۱۶۴- ب (۳ لا- م) ۴ {۱ (لا- م) - ۲} ب {

$$۱ = (۱- لا- م) ۴ + ۳ (۱- لا- م)$$

 ۱۸۱- تین قیمتیں ' ۲۹۹ تقریباً
 ۱۸۲- ۱۹۸ و نیمقصری = ۵۶ ۹ تقریباً
 ۱۸۵- ۲۶۰.۷ اور - ۱۵۲۳

612



عدرون کے لوکار تم

طبعی جیوب، طبعی ماس

لوکار تمی جیوب اور لوکار تمی ماس وغیرہ

جدول اول
عدوں کے نوکار

[illegible]

[illegible]

5.

عبدول کے نوکاح

[illegible]

[illegible]

عزیز کے لئے

02.

[illegible]

5.

۱۶۷۷

q	a	z	y	d	r	p	i	q	a	z	y	d	r	p	i	.
00	04	08	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
01	05	09	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65
02	06	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66
03	07	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
04	08	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
05	09	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
06	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
07	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71
08	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72
09	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73
10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74
11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75
12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77
14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78
15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79
16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81
18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82
19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83
20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85
22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86
23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87
24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89
26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90
27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91
28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93
30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94
31	35	39	43	47	51											

علاؤں کے لوگوں

[illegible]

طبعی مجموعہ

وزن

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

طبعی مجموعہ

3.

محبوب

[illegible]

طبیعی تجربہ

نق

۱۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
۲۲۵	۲۰۰	۱۷۵	۱۵۰	۱۲۵	۱۰۰	۷۵	۵۰	۲۵	۰	۲۵	۵۰	۷۵	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۰	۲۲۵	۲۵۰
۲۲۳	۱۹۸	۱۷۳	۱۴۸	۱۲۳	۹۸	۷۳	۴۸	۲۳	۰	۲۳	۴۸	۷۳	۹۸	۱۲۳	۱۴۸	۱۷۳	۱۹۸	۲۲۳	۲۴۸
۲۲۱	۱۹۶	۱۷۱	۱۴۶	۱۲۱	۹۶	۷۱	۴۶	۲۱	۰	۲۱	۴۶	۷۱	۹۶	۱۲۱	۱۴۶	۱۷۱	۱۹۶	۲۲۱	۲۴۶
۲۱۹	۱۹۴	۱۷۰	۱۴۹	۱۲۴	۹۷	۷۲	۴۷	۲۲	۰	۲۲	۴۷	۷۲	۹۷	۱۲۴	۱۴۹	۱۷۴	۱۹۹	۲۲۴	۲۴۹
۲۱۷	۱۹۲	۱۶۸	۱۴۲	۱۱۷	۹۲	۶۷	۴۲	۱۷	۰	۱۷	۴۲	۶۷	۹۲	۱۱۷	۱۴۲	۱۶۷	۱۹۲	۲۱۷	۲۴۲
۲۱۳	۱۹۰	۱۶۶	۱۴۰	۱۱۶	۹۰	۶۵	۴۰	۱۵	۰	۱۵	۴۰	۶۵	۹۰	۱۱۶	۱۴۰	۱۶۴	۱۸۹	۲۱۳	۲۳۸
۲۱۱	۱۸۷	۱۶۳	۱۳۷	۱۱۳	۸۷	۶۳	۳۷	۱۳	۰	۱۳	۳۷	۶۳	۸۷	۱۱۳	۱۳۷	۱۶۱	۱۸۶	۲۱۰	۲۳۵
۲۰۸	۱۸۵	۱۶۲	۱۳۹	۱۱۶	۸۳	۵۰	۲۶	۱۲	۰	۱۲	۲۶	۵۰	۷۳	۹۶	۱۱۹	۱۴۲	۱۶۵	۱۸۸	۲۱۱
۲۰۵	۱۸۳	۱۵۹	۱۳۷	۱۱۳	۸۱	۵۸	۳۶	۱۳	۰	۱۳	۳۶	۵۸	۷۳	۹۶	۱۱۹	۱۴۲	۱۶۵	۱۸۸	۲۱۱
۲۰۲	۱۷۹	۱۵۷	۱۳۵	۱۱۳	۸۰	۵۷	۳۵	۱۲	۰	۱۲	۳۵	۵۷	۷۲	۹۵	۱۱۸	۱۴۰	۱۶۲	۱۸۵	۲۰۸

5

چ

[illegible]

644

[illegible]

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱

ضمیمہ نمبر ۱۵۵

طبعی

[illegible]

۵۵

رق																			
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۴۱	۲۴۱	۲۱۱	۱۸۱	۱۵۱	۱۲۰	۹۰	۶۰	۳۰	۲۹	۲۸۱	۲۵۱	۲۲۱	۱۹۱	۱۶۱	۱۳۱	۱۰۱	۷۱	۴۱	۱۱
۲۴۲	۲۴۲	۲۱۲	۱۸۲	۱۵۲	۱۲۱	۹۱	۶۱	۳۱	۳۰	۲۸۲	۲۵۲	۲۲۲	۱۹۲	۱۶۲	۱۳۲	۱۰۲	۷۲	۴۲	۱۲
۲۴۳	۲۴۳	۲۱۳	۱۸۳	۱۵۳	۱۲۲	۹۲	۶۲	۳۲	۳۱	۲۸۳	۲۵۳	۲۲۳	۱۹۳	۱۶۳	۱۳۳	۱۰۳	۷۳	۴۳	۱۳
۲۴۴	۲۴۴	۲۱۴	۱۸۴	۱۵۴	۱۲۳	۹۳	۶۳	۳۳	۳۲	۲۸۴	۲۵۴	۲۲۴	۱۹۴	۱۶۴	۱۳۴	۱۰۴	۷۴	۴۴	۱۴
۲۴۵	۲۴۵	۲۱۵	۱۸۵	۱۵۵	۱۲۴	۹۴	۶۴	۳۴	۳۳	۲۸۵	۲۵۵	۲۲۵	۱۹۵	۱۶۵	۱۳۵	۱۰۵	۷۵	۴۵	۱۵
۲۴۶	۲۴۶	۲۱۶	۱۸۶	۱۵۶	۱۲۵	۹۵	۶۵	۳۵	۳۴	۲۸۶	۲۵۶	۲۲۶	۱۹۶	۱۶۶	۱۳۶	۱۰۶	۷۶	۴۶	۱۶
۲۴۷	۲۴۷	۲۱۷	۱۸۷	۱۵۷	۱۲۶	۹۶	۶۶	۳۶	۳۵	۲۸۷	۲۵۷	۲۲۷	۱۹۷	۱۶۷	۱۳۷	۱۰۷	۷۷	۴۷	۱۷
۲۴۸	۲۴۸	۲۱۸	۱۸۸	۱۵۸	۱۲۷	۹۷	۶۷	۳۷	۳۶	۲۸۸	۲۵۸	۲۲۸	۱۹۸	۱۶۸	۱۳۸	۱۰۸	۷۸	۴۸	۱۸
۲۴۹	۲۴۹	۲۱۹	۱۸۹	۱۵۹	۱۲۸	۹۸	۶۸	۳۸	۳۷	۲۸۹	۲۵۹	۲۲۹	۱۹۹	۱۶۹	۱۳۹	۱۰۹	۷۹	۴۹	۱۹
۲۵۰	۲۵۰	۲۲۰	۱۹۰	۱۶۰	۱۳۰	۱۰۰	۷۰	۴۰	۳۸	۲۹۰	۲۶۰	۲۳۰	۲۰۰	۱۷۰	۱۴۰	۱۱۰	۸۰	۵۰	۲۰

ضمیمہ

APU

[illegible]

[illegible]

طبعی دواں ایضاً

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

APA

۴۲۵	۵۰۳	۴۲۱	۳۲۰	۲۰۸	۲۱۹	۱۳۲	۴۲	۳۴۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۴۵۹	۴۰۱	۵۲۹	۴۵۱	۳۷۹	۳۰۰	۲۴۵	۱۵	۴۲۸	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۷۰۷	۴۲۸	۵۲۹	۴۷۱	۳۲۹	۲۳۵	۱۵۷	۷۸	۳۷۷	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۷۴۰	۴۵۸	۵۷۹	۴۹۲	۳۲۱	۲۳۹	۱۴۷	۸۲	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۷۷۹	۴۸۰	۴۰۳	۵۱۷	۳۲۱	۲۴۵	۱۵۲	۸۲	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۸۱۹	۷۲۵	۴۲۴	۵۲۴	۴۵۲	۳۴۹	۱۷۹	۹۱	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۸۹۰	۷۴۴	۴۹۹	۵۷۲	۳۷۸	۲۸۲	۱۹۱	۹۲	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۹۰۷	۸۰۹	۷۰۵	۴۰۴	۵۰۴	۳۴۴	۲۰۱	۹۱	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۹۵۹	۸۵۲	۷۴۹	۴۲۹	۵۲۲	۳۴۹	۲۱۳	۱۰۷	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰
۱۰۱۹	۹۰۳	۷۹۰	۷۷۷	۵۹۵	۳۴۹	۲۲۱	۱۱۳	۳۷۹	۱۵۲۲۷۵۸	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۱۳۰	۱۵۲۲۵۹۳	۱۵۲۲۹۸۷	۱۵۲۳۱۹۱	۵۰

نویسندگان

میں نے

[illegible]

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

طبیعیات کا اہتمام

۱۶۱ پی پی پی

අංකය	විස්තරය	මුදල
1	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ කාර්යාලය	1000000
2	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ නිවස	500000
3	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
4	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
5	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
6	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
7	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
8	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
9	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
10	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
11	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
12	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
13	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
14	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
15	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
16	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
17	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
18	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
19	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000
20	අධ්‍යක්ෂවරයාගේ පුද්ගලික උපයෝජනය	250000

۲۵۴	۴۷۰	۲۲۷	۲۰۴	۱۷۹	۱۳۵	۱۰۱	۷۸	۲۲۲	۷۹	۹۱۵۵۱۰۲	۹۱۵۴۷۹	۹۱۵۴۲۲۲	۹۱۵۴۰۹۲	۹۱۵۴۷۷۵	۹۱۵۴۲۲۰۵	۲۰
۲۸۹	۴۵۷	۲۲۵	۱۹۲	۱۷۱	۱۲۸	۹۷	۷۲	۲۲۲	۷۸	۵۵۷۴۴	۵۵۷۷۴۷	۵۵۷۴۰۸	۵۵۷۰۸۵	۵۵۷۷۷۱	۵۵۷۴۲۲۲	۲۱
۳۷۵	۲۴۴	۲۱۲	۱۸۲	۱۵۲	۱۲۲	۹۲	۷۱	۲۲۱	۷۷	۵۵۸۸۹	۵۵۸۵۸۸	۵۵۸۲۸۴	۵۵۷۹۷۸	۵۵۷۷۷۹	۵۵۷۴۲۵۸	۲۲
۲۲۲	۲۲۲	۲۰۴	۱۷۴	۱۴۷	۱۱۷	۸۷	۵۸	۲۲۹	۷۷	۵۷۰۷۴۷	۵۷۰۲۵۹	۵۷۰۰۷۰	۵۵۹۷۷۸	۵۵۹۴۸۴	۵۵۹۱۸۸	۲۳
۲۵۰	۲۲۲	۱۹۵	۱۷۷	۱۲۹	۱۱۱	۸۲	۵۷	۲۸	۷۵	۵۷۲۲۲۲	۵۷۲۰۴۹	۵۷۱۷۷۲	۵۷۱۴۹۴	۵۷۱۲۱۲	۵۷۰۹۲۱	۲۴
۲۲۹	۲۱۲	۱۸۷	۱۵۹	۱۲۲	۱۰۷	۸۰	۵۲	۲۷	۷۴	۹۱۷۲۹۲۴	۹۱۷۲۷۷۲	۹۱۷۲۲۲۹	۹۱۷۲۱۲۲	۹۱۷۲۸۷۵	۹۱۷۲۵۹۵	۲۵
۲۲۹	۲۰۲	۱۷۸	۱۷۲	۱۲۷	۱۰۲	۷۷	۵۱	۲۵	۷۲	۵۷۵۷۵۷	۵۷۵۴۰۵	۵۷۴۹۵۲	۵۷۴۷۹۸	۵۷۴۴۴۲	۵۷۴۱۸۴	۲۶
۲۱۹	۱۹۴	۱۷۰	۱۴۷	۱۰۲	۹۷	۷۲	۴۹	۲۲	۷۲	۵۷۷۹۲۲	۵۷۷۹۸۲	۵۷۷۴۲۴	۵۷۷۱۹۷	۵۷۵۹۵۲	۵۷۵۷۰۵	۲۷
۲۱۰	۱۸۷	۱۷۲	۱۴۰	۱۱۷	۹۲	۷۰	۴۷	۲۲	۷۱	۵۷۸۲۲۸	۵۷۸۰۹۸	۵۷۷۷۸۷	۵۷۷۷۲۲	۵۷۷۴۲۸	۵۷۷۱۷۱	۲۸
۲۰۱	۱۷۴	۱۵۷	۱۲۴	۱۱۲	۸۹	۷۷	۴۵	۲۲	۷۰	۵۷۹۷۷۷	۵۷۹۴۵۷	۵۷۹۲۲۲	۵۷۹۰۱۰	۵۷۸۷۸۴	۵۷۸۵۵۷	۲۹
۹	۸	۷	۷	۵	۴	۳	۲	۱		۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	

نوعی جیب تمام

— 516 —

[illegible]

۱۳۳۲	۱۱۸	۱۰۲	۸۹	۷۲	۵۹	۴۲	۳۰	۱۵	۲۹	۹۵۱۵۲۹	۹۵۱۲۰۲	۹۵۱۲۵۲	۹۵۱۰۰۲	۹۵۱۰۹۵۵	۹۵۱۰۸۰۵	۲۰
۱۳۲۹	۱۱۲	۱۰۰	۸۷	۷۲	۵۷	۴۲	۳۹	۱۲	۲۸	۹۵۲۲۱۰	۹۵۲۲۹۹	۹۵۲۲۲۲	۹۵۱۹۸۲	۹۵۱۸۲۹	۹۵۱۸۲۹	۲۱
۱۳۲۲	۱۱۰	۹۷	۸۲	۷۹	۵۵	۴۱	۳۸	۱۲	۲۷	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۱۰۲	۹۵۲۹۹۹	۹۵۲۸۲۰	۹۵۲۹۹۱	۹۵۲۵۵۱	۲۲
۱۳۲۰	۱۰۷	۹۳	۸۰	۷۷	۵۳	۴۰	۳۷	۱۳	۲۶	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۳
۱۱۵	۱۰۲	۹۰	۷۷	۷۲	۵۱	۳۸	۳۷	۱۳	۲۵	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۴
۱۱۲	۹۹	۸۷	۷۲	۷۲	۵۰	۳۷	۳۵	۱۲	۲۴	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۵
۱۰۸	۹۷	۸۲	۷۲	۷۰	۴۸	۳۱	۲۲	۱۲	۲۳	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۶
۱۰۴	۹۲	۸۱	۷۰	۵۸	۴۲	۳۵	۲۲	۱۲	۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۷
۱۰۰	۸۹	۷۸	۷۷	۵۷	۴۵	۳۲	۲۲	۱۱	۲۱	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۸
۹۷	۸۷	۷۷	۷۵	۵۲	۴۲	۳۲	۲۲	۱۱	۲۰	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۲۹
۹۹	۸۰	۷۷	۷۲	۷۰	۴۲	۳۲	۲۲	۱۱	۲۰	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۹۵۲۲۲۲	۳۰

دو درستی بخوبی انجام

وہابیہ

[illegible]

[illegible]

وہابی جمہوریہ التام

لوکارچی جنوری

ق	ا	ب	پ	ت	ث	ج	د	د.	پ.	پ.	پ.	ا.	ب			
۲۰	۲۲	۲۱	۲۵	۲۲	۱۸	۱۳	۹	۲	۱۹	۳۹۷۵۲۲	۳۹۷۶۴۹	۳۹۷۶۳۵	۳۹۷۶۲۹۰	۳۹۷۶۳۲۴	۳۹۷۶۲۹۹	۲۰
۲۸	۲۲	۳۰	۲۲	۲۱	۱۷	۱۳	۹	۲	۱۸	۳۹۷۷۷۹	۳۹۷۷۳۸	۳۹۷۷۹۲	۳۹۷۷۵۳	۳۹۷۷۱۰	۳۹۷۷۶۷۷	۲۸
۳۲	۳۲	۲۸	۲۲	۲۰	۱۲	۱۲	۸	۲	۱۷	۳۹۸۰۲۱	۳۹۷۹۸۲	۳۹۷۹۴۲	۳۹۷۹۰۲	۳۹۷۸۶۱	۳۹۷۸۲۱۱	۳۲
۳۴	۳۰	۲۲	۲۲	۱۹	۱۵	۱۱	۸	۲	۱۲	۳۹۸۲۲۸	۳۹۸۲۱۱	۳۹۸۱۷۴	۳۹۸۱۳۲	۳۹۸۰۵۸	۳۹۸۰۲۰	۳۴
۳۲	۲۸	۲۵	۲۱	۱۸	۱۲	۱۱	۷	۲	۱۵	۳۹۸۴۲۲	۳۹۸۴۲۲	۳۹۸۳۹۱	۳۹۸۳۵۲	۳۹۸۳۲۰	۳۹۸۲۸۴	۳۲
۳۰	۲۲	۲۲	۲۰	۱۷	۱۳	۱۰	۷	۲	۱۴	۳۹۸۵۲۵	۳۹۸۵۲۷	۳۹۸۵۵۹	۳۹۸۵۲۱	۳۹۸۵۵۲	۳۹۸۵۲۹	۳۰
۲۷	۲۲	۲۱	۱۸	۱۵	۱۲	۹	۲	۱۳	۱۳	۳۹۸۸۴۳	۳۹۸۸۱۳	۳۹۸۷۸۲	۳۹۸۷۵۳	۳۹۸۷۲۲	۳۹۸۶۹۰	۲۷
۲۵	۲۲	۲۰	۱۷	۱۴	۱۱	۸	۲	۱۲	۱۲	۳۹۹۰۱۳	۳۹۹۰۴۲	۳۹۹۰۵۸	۳۹۹۰۲۰	۳۹۸۹۰۱	۳۹۸۸۷۷	۲۵
۲۳	۲۱	۱۸	۱۲	۱۳	۱۰	۸	۵	۲	۱۱	۳۹۹۱۷۰	۳۹۹۱۴۵	۳۹۹۱۱۹	۳۹۹۰۹۲	۳۹۹۰۶۷	۳۹۹۰۴۰	۲۳
۲۱	۱۹	۱۲	۱۴	۱۲	۹	۷	۲	۱۰	۱۰	۳۹۹۳۱۳	۳۹۹۲۹۰	۳۹۹۲۷۷	۳۹۹۲۴۲	۳۹۹۲۱۹	۳۹۹۱۹۵	۲۱

[illegible]

وہابی جمہوریہ قائم

[illegible]

١٦٥٥

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
٢٢٤	٢٠٠	٢٤٠	٢٣١	١٩٢	١٥٢	١١٢	٤٤	٣٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩
٢٣٣	٢٩٢	٢٥٩	٢٢٢	١٨٥	١٤٨	١١١	٤٢	٣٤	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦	٢٦
٢٢٢	٢٨٢	٢٥٠	٢١٢	١٤٩	١٢٢	١٠٤	٤٢	٣٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
٢٢١	٢٤٤	٢٢٢	٢٠٨	١٤٢	١٢٨	١٠٢	٢٩	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥
٢٠٢	٢٢٨	٢٢٥	٢٠١	١٢٨	١٢٢	١٠١	٢٤	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
٢٢٢	٢٢٢	٢٢٨	١٩٥	١٢٢	١٢٠	٩٨	٢٥	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
٢٨٢	٢٥٢	٢٢١	١٩٠	١٥٨	١٢٢	٩٥	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
٢٤٤	٢٢٢	٢١٢	١٨٥	١٥٢	١٢٢	٩٢	٢٢	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١	٢١
٢٤١	٢٢١	٢١١	١٨١	١٥١	١٢٠	٩٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠
٢٢٢	٢٢٢	٢٠٢	١٤٤	١٢٤	١١٨	٨٨	٥٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩	٢٩
٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢	٢٢٢

٢٣٩- ٢٢١ ٢٠٢ ١٤٢ ١٢٢- ١١٩ ٨٤ ٥٨ ٢٩	٥٩	١٤٤٥٩١ ٩١٤٤٢-٢ ٩١٤٤٠١٥ ٩١٤٣٤٣٥ ٩١٤٣٣٢٥ ٩١٤٣١٢٢ ٢٠
٢٥٥ ٢٢٤ ١٩٨ ١٤٠ ١٢٣ ١١٢ ٨٥ ٥٤ ٢٨	٥٨	١٤٩٢٩٤ ١٤٩٠١٥ ١٤٤٢٢ ١٤٣٢٢ ١٤٢١٣ ١٤٤٨٤٤ ٢١
٢٥١ ٢١٢ ١٩٥ ١٣٤ ١٢٩ ١١٢ ٨٢ ٥٣ ٢٨	٥٤	١٤٠٩٤٥ ١٤٠٣٩٤ ١٤٠٢١٩ ١٤٠١٢٠ ١٤٩٨٣ ١٤٩٥٤٩ ٢٢
٢٢٤ ٢٢٠ ١٩٢ ١٣٥ ١٢٤ ١١٠ ٨٢ ٥٥ ٢٨	٥٣	١٤٣٣٢٣ ١٤٢٢٥٢ ١٤٢٠٤٨ ١٤١٨٠٢ ١٤١٥٢٨ ١٤١٢٥٢ ٢٣
٢٢٢ ٢١٤ ١٩٠ ١٣٢ ١٢٣ ١٠٨ ٨١ ٥٢ ٢٤	٥٥	١٤٢٢٥٢ ١٤٢٩٨٢ ١٤٢٤١٢ ١٤٢٢٢٢ ١٤٢١٤١ ١٤٢٠٩٩ ٢٢
٢٢١ ٢١٢ ١٨٨ ١٣٠ ١٢٢ ١٠٤ ٨٠ ٥٢ ٢٤	٥٢	٩١٥٥٨٣ ٩١٥٥٩٢ ٩١٥٥٢٢٣ ٩١٥٠٥٩ ٩١٢٢٤٩١ ٩١٢٢٥٢٢ ٢٥
٢٢١ ٢١٢ ١٨٥ ١٥٨ ١٢٢ ١٠٣ ٤٩ ٥٢ ٢٣	٥٢	١٤٢٢٢٢ ١٤٤١٨٥ ١٤٣٩٢١ ١٤٣٣٥٣ ١٤٣١٢٣ ١٢٣
٢٢٣ ٢٠٩ ١٨٢ ١٥٤ ١٢١ ١٠٥ ٤٨ ٥٢ ٢٣	٥٢	١٤٩٠٢٠ ١٤٨٤٥٩ ١٤٨٢٩٨ ١٤٨٢٢٣ ١٤٦٩٤٢ ١٤٤٤١١ ٢٤
٢٢٢ ٢٠٨ ١٨٢ ١٥٣ ١٢٠ ١٠٢ ٤٨ ٥٢ ٢٣	٥١	١٣٠٥٤٨ ١٣٠٢٢٠ ١٣٠٠٣١ ١٢٩٨٠١ ١٢٩٥٢١ ١٢٩٢٨١ ٢٨
٢٢٢ ٢٠٣ ١٨٠ ١٥٥ ١٢٩ ١٠٢ ٤٤ ٥٢ ٢٣	٥٠	١٢٢١٢٥ ١٢١٨٢٨ ١٢١٣١٠ ١٢١٢٥٢ ١٢١٠٩٥ ١٢٠٨٢٤ ٢٩
٢٩ ٨ ٤ ٩ ٥ ٢ ٢ ٢ ٢ ١	١٠ ٢٠ ٢٠ ٢٠ ٢٠ ٢٠ ٢٠ ٢٠	

وفاقی کا نام

۲۲۲۲	۲۲۲۲	۱۰۰	۱۵۵	۱۲۹	۱۰۲	۷۷	۵۲	۲۷	۲۷	۱۰۵۰۸۹۰۰۵	۱۰۵۰۸۹۷۷	۱۰۵۰۸۹۲۲	۱۰۵۰۷۸۷۵	۱۰۵۰۷۸۹۱۹	۵۰
۲۲۲۲	۲۰۸	۱۸۲	۱۵۷	۱۲۰	۱۰۲	۷۸	۵۲	۲۷	۲۷	۱۰۵۰۲۵۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۲۷	۲۰۹	۱۸۲	۱۵۷	۱۲۱	۱۰۵	۷۸	۵۲	۲۷	۲۷	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۲۸	۲۱۲	۱۸۵	۱۵۸	۱۲۲	۱۰۷	۷۹	۵۲	۲۷	۲۷	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۲۹	۲۱۲	۱۸۸	۱۷۰	۱۲۲	۱۰۷	۸۰	۵۲	۲۷	۲۷	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۲۲	۲۱۷	۱۹۰	۱۷۲	۱۲۷	۱۰۸	۸۱	۵۲	۲۷	۲۷	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۲۷	۲۲۰	۱۹۲	۱۷۵	۱۲۷	۱۱۰	۸۲	۵۵	۲۸	۲۸	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۵۱	۲۲۲	۱۹۵	۱۷۷	۱۲۹	۱۱۲	۸۲	۵۷	۲۸	۲۸	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۵۵	۲۲۷	۱۹۸	۱۷۰	۱۲۲	۱۱۳	۸۵	۵۷	۲۸	۲۸	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۲۲۷۰	۲۳۱	۲۰۲	۱۷۲	۱۲۲	۱۱۷	۸۷	۵۸	۲۹	۲۹	۱۰۵۰۲۷	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۱۰۵۰۱۹۹	۵۰
۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰

دوره سیم

وہابیہ

[illegible]

فرق استوار چلیں گے کہ وجہ نہیں ہو سکتے

44.

مردم بختی کا سہا نام

مقاویر مستقله

ایک زاویہ نیمقطری = $۱۲^{\circ} ۵۷'$ تقریباً = ۲۰.۴۲۶۵
 نوک = $۲۰.۴۲۶۵ = ۵۳۱۴۴۲۵۵$

$$۰.۳۹۶۷۱۴۹۹ = \pi \text{ نوک}$$

$$۲۳۵۰۲۸۵۰۱ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۲۳۲۲۱۸۷۷۲ = \frac{\pi}{180} \text{ نوک}$$

$$۱۳۷۵۸۱۲۲۶ = \frac{180}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۰.۳۹۹۴۲۹۹۷ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۲۳۰۰۵۷۰۰۳ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۰.۳۳۸۵۷۴۹ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۲۳۷۵۱۲۲۵۱ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۰.۳۱۷۵۷۱۹۹ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۲۳۸۳۲۲۸۳۲ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۱۳۷۳۲۰۵۰۸ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۲۳۲۲۹۴۹۹ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۲۳۸۲۸۲۴۷۱ = \frac{1}{\pi} \text{ نوک}$$

$$۳۳۱۴۱۵۹۲۶۵ = \pi$$

$$۰.۳۳۱۸۳۰۹۸۹ = \frac{1}{\pi}$$

$$۰.۳۱۷۴۵۳۲۹ = \frac{\pi}{180}$$

$$۵۷۳۹۵۷۷۹۵ = \frac{180}{\pi}$$

$$۹۳۸۹۹۰۴۴۰ = \frac{1}{\pi}$$

$$۰.۳۱۰۱۳۲۱۱۸ = \frac{1}{\pi}$$

$$۱۳۷۷۲۵۳۸۵ = \frac{1}{\pi}$$

$$۰.۳۵۴۳۱۸۹۵۸ = \frac{1}{\pi}$$

$$۱۳۴۴۵۹۱۸۹ = \frac{1}{\pi}$$

$$۰.۳۸۷۷۸۴۰۹ = \frac{1}{\pi}$$

$$۱۳۴۱۴۲۱۳۵ = \frac{1}{\pi}$$

$$۲۳۲۳۹۰۷۷۹ = \frac{1}{\pi}$$

$$۲۳۷۲۵۷۵۱۷ = \frac{1}{\pi}$$

$$۲۳۱۷۲۲۷۷۷ = \frac{1}{\pi}$$

تبر

TRIGONOMETRY.

Angle (Right angle)	زاویہ (زاویہ قائمہ)
Arc	قوس
Angle of Elevation	زاویہ ارتعاع
Angle of depression	زاویہ انخفاض
Ambiguous case	صورت مشتبہ
Bisector (Internal) (External)	منصف داخلي خارجي
Base line	بنیادی خط
Bearings (Compass)	جہات
Circular measure	قوسی پیمانہ
Centesimal measure	درجی پیمانہ
Clock wise (Counter clock wise)	موافق سمت ساعت (مقابل سمت ساعت)
Constants	مقادیر مستقلہ
Circumference	محیط
Chord	وتر
Cosine	جیب التمام
Cotangent	مماس التمام
Cosecant	قاطع التمام

Covered Sine	سینہ تمام
Complementary angles	متمم زاویے
Complement	متمم
Characteristic	میز
Circum-circle	بیرونی دائرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circum-centre	بیرونی دائرہ کا مرکز
Circular Functions	مستدیر جملے
Degree, Minute, Second.	درجہ، دقیقہ، ثانیہ
Decagon	مشر
Dodecagon	اثنا عشری
Dip (of the horizon)	دائق کا میلان
Dimensions	ابعاد
Diameter	قطر
Equilateral (Triangle)	مثلث، متساوی الاضلاع
Elevation	ارتفاع
Elements (of a triangle)	مثلث کے اجزا
Escribed circle	جانبی دائرہ
Elimination	استقاط
Excentric triangle	جانبی مرکزوں کا مثلث
Fixed (lines, Axes)	ثابت (خطوط، محاور)

Fundamental (Formulas)	اساسی (ضابطے)
Formula	ضابطہ
Geographical (miles)	جغرافی (میل)
Graph	ترسیم
Gradient	آمار چڑھاؤ
Heptagon	مسبع
Infinity	لا انتہائی
Isosceles (triangle)	مثلث (تساوی الساقین)
Identities	متماثلات
Incircle	اندرونی دائرہ
Incentre	اندرونی دائرہ کا مرکز
Inverse Circular functions	مقلوب و مستدیر جملے
Incommensurable	متبائن
Latitude	عرض بلد
Logarithm	لوگارتم
Line of greatest slope	خط میلان اعظم
Meridian	نصف النہار
Multiple angles	اضعافی زاویے
Mantissa	اعشاریہ لوگارتھی
Median	وسطانیہ
Nine point circle	نو نقطی دائرہ

Normal (to an ellipse)	وطیلگی کا، عماد
Ortho-centre	مرکز عمودی
Pentagon	پنجمین
Orbit (Earth)	مدار (زمین)
Obtuse, Acute (Angles)	ذراویہ، منفرجہ (زاویہ)، حادہ
Plane (Trigonometry)	علم مثلث (مستوی)
Perimeter	گھیرا۔ مجموعہ اضلاع
Pentagon	پنجمین
Point (Line) at infinity	لا انتہائی پیر کا نقطہ
Periods	ادوار
Periodic functions	عملات دوریہ
Proportional parts (principle of)	اصول، اجزائے متناسب
Pedal triangle	مثلث پائین
Projection	تظیل (ظن)،
Quadrant	ربع
Quadrilateral	ذواربعتہ الاضلاع
Revolving line	خط دائر
Right angled triangle	مثلث قائم الزاویہ
Radian	ینقطری
Regular (polygon)	منظم (کثیر الاضلاع)
Radius	نصف قطر

Rectilinear (figure)	شکل، مستقیم الاضلاع
Reciprocal	تکافؤ
Spherical (Trigonometry)	علم مثلث، کروی
Sexagesimal measure	ستینی پیمانہ
Sector	قطاع (دائرہ)
Semi-circle	نصف دائرہ
Segment	قطبہ (دائرہ)
Sirius	شعری
Sine	جیب
Secant	قاطع التمام
Sextant	سدس
Supplement	تکمیلہ
Submultiple angles	کسری زاوے
Subsidiary angles	امدادی زاوے
Solution (of triangles)	دشمنوں کا حل
Trigonometry	علم مثلث
Theorem	مسئلہ (اثباتی)
Trigonometrical (ratios)	مثلثی (نسبتیں)
Tangent	ماس
Theodolite	زاویہ میں
Tables (of Logarithm)	جداول (لوگارتھی)

Versed Sine

سهم المحب، حیب معکوس

Visible horizon (Offing)

آفاق مرئی

Angle and sides of a triangle

مثلث کے زاویے اور اضلاع

a, b, c,

ا، ب، ج

A. B. C.

ا، ب، ج

II

(جیت)



DUE DATE

Rare

Cl. No. *514.5*

Acc. No. *159)*

168 FEB 14

Late Fine Ordinary books 25 p. per day. Text Book

Re 1 per day. Over night book Re 1 per day.

--	--	--	--

